参考答案

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

第1课时　集合的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)研究对象　$a,b,c,\cdots$　(2)元素　$A,B,C,\cdots$　(3)一样的　(4)确定性　互异性　无序性

知识点二

a 是集合 A 的元素　$a\in A$　a 不是集合 A 中的元素　$a\notin A$

知识点三

$\mathbf{N}$　$\mathbf{N}^*$　$\mathbf{N}_+$　$\mathbf{Z}$　$\mathbf{Q}$　$\mathbf{R}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

2.$\in$　$\notin$　$\notin$　$\in$　$\in$

任务型课堂

任务1

1.B　**解析**：对于A，大于6的所有整数，满足确定性，故选项A能组成集合；

对于B，高个子的标准不确定，不满足确定性，故选项B不能组成集合；

对于C，太阳系的所有行星，满足确定性，故选项C能组成集合；

对于D，函数 $y=x$ 图象上的所有点，满足确定性，故选项D能组成集合.故选B.

2.A

任务2

【探究活动】

例1　(1)C　**解析**：对于①，$\frac{\pi}{2}$ 为实数，而 $\mathbf{R}$ 表示实数集，所以 $\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$，所以①正确；

对于②，-2 为整数，而 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，所以 $-2\in\mathbf{Z}$，所以②错误；

对于③，$|-3|=3$ 为正整数，而 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集，所以 $|-3|\in\mathbf{N}^*$，所以③错误；

对于④，因为 $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 为无理数，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，所以 $|-\sqrt{3}|\notin\mathbf{Q}$，所以④正确.故选C.

(2)$\{a\mid -4<a\leqslant -2\}$　**解析**：因为 $1\notin A$，$2\in A$，所以 $\begin{cases}2\times1+a\leqslant0,\\2\times2+a>0,\end{cases}$ 即 $\{a\mid -4<a\leqslant -2\}$.

【应用迁移】

1.A　2.AD

任务3

【探究活动】

例2　**解**：由题意可知 $a=1$ 或 $a^2=a$.若 $a=1$，则 $a^2=1$，这与 $a^2\neq1$ 相矛盾，故 $a\neq1$.若 $a^2=a$，则 $a=0$ 或 $a=1$(舍去).又当 $a=0$ 时，集合 A 中只含有元素1和0，满足集合中元素的互异性，符合题意.所以实数 a 的值为0.

[一题多思]

思考1.提示：不要忘记验证集合中元素的互异性.

思考2.提示：由集合中元素的互异性，得 $a^2\neq1$，即 $a\neq\pm1$.

思考3.提示：因为集合 A 中只有两个元素 a 和 a^2，所以 $a\neq a^2$，解得 $a\neq0$ 且 $a\neq1$.

【应用迁移】

B

第2课时　集合的表示

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.一一列举

知识点二

1.共同特征　$\{x\in A\mid P(x)\}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√　2.A

任务型课堂

任务1

1.C

2.D　**解析**：集合 A 的元素表示的是直角坐标系中一条直线上的点(数对)，选项A和选项C表示的都是只有一个点作为元素的集合，可以首先排除；再将点的坐标代入到集合 A 的直线方程当中，可知 $(-2,2)$ 不在直线上，$(1,-1)$ 在直线上.故选D.

3.B　**解析**：因为 $\frac{4}{2-x}\in\mathbf{Z}$，所以 $2-x=-4,-2,-1,1,2,4$.

若 $2-x=-4$，则 $x=6$，符合；若 $2-x=-2$，则 $x=4$，符合；

若 $2-x=-1$，则 $x=3$，符合；若 $2-x=1$，则 $x=1$，符合；

若 $2-x=2$，则 $x=0$，符合；若 $2-x=4$，则 $x=-2$，不符合.

所以 $M=\{0,1,3,4,6\}$.故选B.

任务2

【探究活动】

例1　**解**：(1)集合可表示为 $\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant20\}$.

(2)第二象限内的点 (x,y) 满足 $x<0$，且 $y>0$，

故集合可表示为 $\{(x,y)\mid x<0,\text{且 }y>0\}$.

(3)$\{x\mid x=2k+1,k\leqslant99,k\in\mathbf{N}\}$.

(4)$\{x\mid x^2-5x-6=0\}$.

【应用迁移】

解：(1)解 $2x-7<3$ 得 $x<5$，所以 $A=\{x\mid x<5\}$.

(2)函数值组成的集合就是 y 的取值集合，

所以 $B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$.

(3)被 3 除余 2 的正整数可以表示为 $3n+2,n\in\mathbf{N}$，

所以 $C=\{x\mid x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$.

(4)在平面直角坐标系中，坐标轴上的点的共同特征是至少有一个坐标为 0，所以 $D=\{(x,y)\mid xy=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)$\{-1,4\}$ **解析**：因为 $4\in A$，所以 $16-12+a=0$，所以 $a=-4$，所以 $A=\{x\mid x^2-3x-4=0\}=\{-1,4\}$.

(2)**解**：当 $a=0$ 时，原方程变为 $2x+1=0$，此时 $x=-\frac{1}{2}$，符合题意；

当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程，

当 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，原方程的解为 $x=-1$，符合题意.

故当 A 中只有一个元素时，a 的值为 0 或 1.

[一题多思]

思考 1.提示：要弄清集合的代表元素及属性，如本例(1)中集合 A 中的元素就是所给方程的根，由此便把集合的元素或个数问题转化为方程的根或根的个数问题.

思考 2.提示：A 中至多有一个元素，即 A 中有一个元素或没有元素.

当 A 中只有一个元素时，由例题可知，$a=0$ 或 $a=1$.

当 A 中没有元素时，$\Delta=4-4a<0$，且 $a\neq0$，即 $a>1$.

故当 A 中至多有一个元素时，a 的取值范围为 $\{a\mid a=0$，或 $a\geqslant1\}$.

思考 3.提示：不存在.理由如下：

若 $A=\{1\}$，则 $1\in A$，所以 $a+2+1=0$，即 $a=-3$.

又当 $a=-3$ 时，由 $-3x^2+2x+1=0$，

得 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$，

即方程 $-3x^2+2x+1=0$ 有两个根 $-\frac{1}{3}$ 和 1，

此时 $A=\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$，与 $A=\{1\}$ 矛盾.

故不存在实数 a，使 $A=\{1\}$.

【应用迁移】

解：(1)因为 A 中没有元素，所以 $a\neq0$ 且 $\Delta<0$，

所以 $\begin{cases}a\neq0,\\9-8a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{9}{8}$.

所以 a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a>\frac{9}{8}\right\}$.

(2)①当 $a=0$ 时，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$；

②当 $a\neq0$ 时，$\Delta=0$，

所以 $9-8a=0$，解得 $a=\frac{9}{8}$，此时集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

综上所述，当 $a=0$ 时，集合 $A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$；当 $a=\frac{9}{8}$ 时，集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

(3)当 A 中只有一个元素时，$a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$；

当 A 中有两个元素时，则 $a\neq0$ 且 $\Delta>0$，即 $\begin{cases}a\neq0,\\9-8a>0,\end{cases}$ 解得 $a<\frac{9}{8}$ 且 $a\neq0$.

综上可得，若 A 中至少有一个元素，a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{9}{8}\right\}$.

1.2 集合间的基本关系

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.(1)任意一个 (2)$\subseteq$ $\supseteq$ (3)包含于 包含

2.(1)$\subseteq$ (3)真包含于 真包含

知识点二

(1)任何 (2)$\varnothing$ (3)子集

知识点三

(1)$A=B$ (2)$B\subseteq A$

知识点四

(1)$\subseteq$ (2)①$\subseteq$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ (4)√ **2.**B

任务型课堂

任务 1

1.C **解析**：对于①，因为 a 是集合 $\{a,b,c\}$ 中的元素，所以 $a\in\{a,b,c\}$，表示的符号不正确，故①错误；

对于②，因为 $\varnothing$ 是任何集合的子集，所以 $\varnothing\subseteq\{0\}$，表示的符号不正确，故②错误；

对于③，因为 $\mathbf{N}$ 中含有元素 0，1，而且还有其他元素，所以 $\{0,1\}\subsetneq\mathbf{N}$，故③正确；

对于④，因为 $\sqrt{2}$ 是无理数，而 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，所以 $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，故④错误.故选 C.

2.BC **3.**B

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)C **解析**：$3\notin A=\{x\mid-4<x<2\}$，故 A 错误；

$2.5\notin A=\{x\mid-4<x<2\}$，故 B 错误；

$\{0\}$ 是集合 $A=\{x\mid-4<x<2\}$ 的真子集，故 C 正确；

因为 $\{x\mid-4<x<2\}$ 是集合 $A=\{x\mid-4<x<2\}$ 的子集，但不是真子集，故 D 错误.故选 C.

(2)A **解析**：根据题意可知，集合 M 中至少含有三个元素(必须包含 1 和 0)，且是集合 $\{0,1,2,3,4\}$ 的子集，

因此，若 M 中含有三个元素，则 M 可以是{0,1,2}，{0,1,3}，{0,1,4}；

若 M 中含有四个元素，则 M 可以是{0,1,2,3}，{0,1,3,4}，{0,1,2,4}；

若 M 中含有五个元素，则 M 可以是{0,1,2,3,4}.

所以满足条件的 M 的个数是 7.故选 A.

【应用迁移】

1.B　**2.**BCD

任务 3

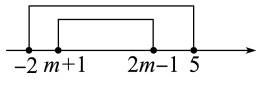
【探究活动】

例 2　(1)B　**解析**：因为 $A\subseteq B$，所以 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$.若 $a-2=0$，则 $a=2$，此时 $A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不符合题意；

若 $2a-2=0$，则 $a=1$，此时 $A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，符合题意.因此，$a=1$.故选 B.

(2)**解**：①若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，解得 $m<2$.

②若 $B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，如图所示.



则 $\begin{cases}m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5,\\m+1\leqslant2m-1,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant3$.

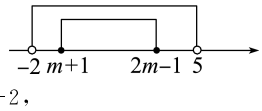
所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\leqslant3\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：若 $A\subseteq B$，则集合 B 一定不是空集，不用再考虑第①步.

思考 2.提示：①若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，解得 $m<2$.

②若 $B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，如图所示.



所以 $\begin{cases}m+1>-2,\\2m-1<5,\\m+1\leqslant2m-1,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m<3$.

所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid m<3\}$.

【应用迁移】

解：(1)因为 $A=B$，故 $a=-2$，$b=6$.

又$(x-3m)(x+m)=0(m>0)$的两个根分别为 $-m$，$3m$，

即 $a=-m$，$b=3m$，

故 $-m=-2$，$3m=6$，故 $m=2$.

(2)因为 $A\subseteq B$，故 $a\leqslant-2$，$b\geqslant6$.

又$(x-3m)(x+m)=0(m>0)$的两个根分别为 $-m$，$3m$，

即 $a=-m$，$b=3m$，

故 $\begin{cases}-m\leqslant-2,\\3m\geqslant6,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant2$.

故实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\geqslant2\}$.

1.3　集合的基本运算

第 1 课时　并集与交集

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)属于集合 A 或属于集合 B　A 并 B　$\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$　(2)A　A

知识点二

(1)属于集合 A 且属于集合 B　A 交 B　$\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$　(2)A　$\varnothing$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

2.$\{-1,0,1,2\}$　$\{0,1\}$

任务型课堂

任务 1

1.C　**2.**D

3.C　**解析**：因为 $B=\{x\mid2x-7<8-3x\}=\{x\mid x<3\}$，$A=\{x\mid2\leqslant x<4\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x<4\}$.故选 C.

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)C　**解析**：题图中阴影部分所表示的集合是 $A\cap B$，又 $A\cap B=\{0,2\}$.故选 C.

(2)C　**解析**：集合 $A=\{x\mid0<x<4,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3\}$，又 $B=\left\{x\mid\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant5\right\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

【应用迁移】

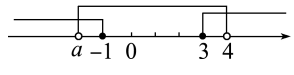
1.C　**解析**：由 $2x-1\geqslant5$，解得 $x\geqslant3$，即 $M=\{x\mid x\geqslant3\}$，故 $M\cap N=\{3\}$.故选 C.

2.C

任务 3

【探究活动】

例 2　(1)C　**解析**：利用数轴，画出满足 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的图形，如图所示.



由图可知，$a\leqslant-1$.

(2)C　**解析**：因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，$a+3\leqslant-a$，即 $a\leqslant-\frac{3}{2}$，符合题意；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}a+3>-a,\\-a\geqslant1,\\a+3<5,\end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant-1$.

所以实数 a 的取值范围为$\{a\mid a\leqslant-1\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：当 $a\geqslant4$ 时，集合 B 为空集，满足题意；

当 $a<4$ 时，集合 B 不是空集，不满足 $A\cap B=\varnothing$.

综上可知，实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant4\}$.

思考 2.提示：当 $a\geqslant4$ 时，集合 B 为空集，满足题意；

当 $a<4$ 时，若要满足 $A\cup B=A$，必有 $a\geqslant3$，即 $3\leqslant a<4$.

综上可知，实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant3\}$.

【应用迁移】

1.D　**2.**D

第 2 课时　补集及综合应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)所有元素　(2)U

知识点二

(1)补集　$\complement_U A$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)×　**2.**C

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**：因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,3,5\}$，故 $\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$，故 $\complement_U A$ 中有 5 个元素.故选 C.

2.A

3.$\{x\mid -2<x<0$，或 $2<x<4\}$　**解析**：因为 $U=\{x\mid -2<x<4\}$，$A=\{x\mid -1\leqslant x-1\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $\complement_U A=\{x\mid -2<x<0$，或 $2<x<4\}$.

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)D　**解析**：因为 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x\mid \sqrt{x}\in A\}$，所以 $B=\{1,4,9,16,25,81\}$，

则 $A\cap B=\{1,4,9\}$，$\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$.

故选 D.

(2)D　**解析**：由题意可知，$A\cup B=\{x\mid x\leqslant 0$，或 $x\geqslant 1\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid 0<x<1\}$.

【应用迁移】

1.ABC　**2.**BCD

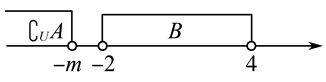
任务 3

【探究活动】

例 2　(1)-3　**解析**：因为 $\complement_U A=\{1,2\}$，所以 $A=\{0,3\}$.所以 $9+3m=0$，解得 $m=-3$.

(2)**解**：(方法一：直接法)由 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$，得 $\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.

因为 $B=\{x\mid -2<x<4\}$，$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，在数轴上画出图形如图所示，

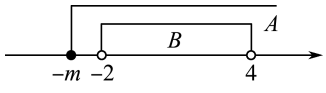


所以 $-m\leqslant -2$，即 $m\geqslant 2$.

所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

(方法二：集合间的关系)由 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，可知 $B\subseteq A$.

又 $B=\{x\mid -2<x<4\}$，$A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$，结合如图所示的数轴，得 $-m\leqslant -2$，即 $m\geqslant 2$.



所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：由已知得 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，所以 $\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.又 $(\complement_U A)\cap B=B$，所以 $B\subseteq\complement_U A$，所以 $-m\geqslant 4$，解得 $m\leqslant -4$.所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant -4\}$.

思考 2.提示：由已知得 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 4\}$.又 $(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$，所以 $-m\leqslant -2$，解得 $m\geqslant 2$.所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

【应用迁移】

1.2

2.解：(1)因为 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x<3\}$.

由 $\complement_U A=\{x\mid x<-2$，或 $x>2\}$，

得 $(\complement_U A)\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

(2)因为 $A\cap C\neq\varnothing$，且 $C=\{x\mid x<m\}$，

所以 $m>-2$.

所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m>-2\}$.

微专题培优(一)　集合中的新定义问题

类型 1

例 1　5　2 023　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}=\{1,2,3,4\}$，所以 $B=\{3,4,5,6,7\}$，所以 $L(A)=5$.因为 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 2n,n\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,\cdots,2n-1,2n(n\in\mathbf{N}^*)\}$，

易知集合 A 中任意两个元素和的最小值是 $1+2=3$，最大值是 $2n-1+2n=4n-1$，

且对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，$3\leqslant k\leqslant 4n-1$，都存在 $a_i,a_j\in A$，使得 $a_i+a_j=k$，所以 $L(A)=4n-1-3+1=4n-3$，由 $4n-3=8\,089$，解得 $n=2\,023$.

【对点训练】

B　**解析**：因为 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，其中不含“孤立元素”且包含有四个元素的集合有 $\{0,1,2,3\}$，$\{0,1,3,4\}$，$\{0,1,4,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{2,3,4,5\}$，共 6 个，所以 U 中无“孤立元素”的包含有四个元素的子集的个数是 6.故选 B.

类型 2

例 2　(1)**解**：由题意，可得 $A^+=\{0,4,8\}$，$A^-=\{0,4\}$，

$B^+=\{2,6,7,10,11,12\}$，$B^-=\{0,1,4,5\}$，

而 $A^+\cap A^-=\{0,4\}\neq\varnothing$，$B^+\cap B^-=\varnothing$，

所以 A 不具有孪生性质，B 具有孪生性质.

(2)**解**：由题意，可得 $C^-=\{0,1,2,\cdots,2\,025-n\}$，

$C^+=\{2n,2n+1,\cdots,n+2\,025,\cdots,4\,050\}$.

因为 $C^+\cap C^-=\varnothing$，所以 $2\,025-n<2n$，即 $n>\dfrac{2\,025}{3}=675$.

又因为 $n\in\mathbf{N}$，所以 n 的最小值是 676.

(3)**证明**：集合 $D=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，

则 $0,x_2-x_1,x_3-x_1,x_4-x_1,x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3$ 都属于集合 D^-.

由题意可知 $0<x_2-x_1<x_3-x_1<x_4-x_1$，且 $x_3-x_2<$

$x_4-x_2>x_4-x_3$.

由于 0 一定是 D^- 中的元素，结合 $D^-=D$，可知 $x_1=0$，

此时 $D=\{0,x_2,x_3,x_4\}$，故 $0,x_2,x_3,x_4,x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3$ 都属于集合 D^-.

由于 $D^-=D$，且 $0<x_2<x_3<x_4$，

因此 x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3 与 x_2,x_3,x_4 中的某一个元素相等.

因为 $0<x_4-x_3<x_4-x_2,x_3-x_2<x_4-x_2$，

所以 x_4-x_2 是 x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3 三者中的最大者，

故 x_4-x_2 只能与 x_2 或 x_3 相等.

又 $x_4-x_3\neq0,x_3-x_2\neq0$，

所以 $x_4-x_2=x_3$，且 $x_3-x_2=x_4-x_3=x_2$，

所以 $x_1+x_4=x_2+x_3$.

【对点训练】

(1)**解**：集合 $M=\{0,2,4\}$ 具有性质 P，集合 $N=\{1,2,3\}$ 不具有性质 P.

理由如下：

对集合 $M=\{0,2,4\}$，因为 $2-0=2,4-2=2,4-0=4,0-0=0,2-2=0,4-4=0$ 均属于 M，

所以集合 M 具有性质 P；

对集合 $N=\{1,2,3\}$，因为 $2+2=4\notin N,2-2=0\notin N$，

所以集合 N 不具有性质 P.

(2)**证明**：因为 $a_n+a_n>a_n$，所以 $a_n+a_n\notin A$，则 $a_n-a_n\in A$，故 $0\in A$.

故得证.

(3)**解**：由于 $a_3+a_3>a_3$，所以 $a_3+a_3\notin A$，故 $a_3-a_3=0\in A$，所以 $a_1=0$.

又 $a_2+a_3>a_3$，所以 $a_2+a_3\notin A$，故 $a_3-a_2\in A$.

又 $0<a_3-a_2<a_3$，故 $a_3-a_2=a_2$，

所以 $a_3=2a_2=8$.

因此集合 $A=\{0,4,8\}$.

类型 3

例 3 C **解析**：当 $a=1$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8)共 5 个；

当 $a=2$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)共 5 个；

当 $a=3$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8)共 5 个；

当 $a=4$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)共 4 个.

所以集合 $P*Q$ 中元素的个数为 $5+5+5+4=19$.故选 C.

【对点训练】

ABC **解析**：对于 A，因为 $A\oplus B=\varnothing$，所以 $\varnothing=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，即 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 是相同的，所以 $A=B$，故选项 A 为真命题；

对于 B，因为 $A\oplus B=B$，所以 $B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，所以 $A\subseteq B$，且 B 中的元素不能出现在 $A\cap B$ 中，因此 $A=\varnothing$，故选项 B 为真命题；

对于 C，$A=B$ 时，$A\oplus B=\varnothing$，$(\complement_U A)\oplus(\complement_U B)=\varnothing=A\oplus B$，故选项 C 为真命题；

对于 D，因为 $A\oplus B\subseteq A$，所以 $\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}\subseteq A$，所以 $B\subseteq A$，故选项 D 为假命题.

故选 ABC.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$p\Rightarrow q$ $p\not\Rightarrow q$ 充分 必要

知识点二

(1)充分 (2)必要

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ (4)× **2.**B

任务型课堂

任务 1

1.A **2.**BD **3.**CD

任务 2

【探究活动】

例 1 **解**：(1)若 $|x|=|y|$，则 $x=y$ 或 $x=-y$，

所以 $p\not\Rightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(2)直角三角形不一定是等腰三角形，

所以 $p\not\Rightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(3)当 $x=1$ 时，$x-1=\sqrt{x-1}=0$，

所以 $p\Rightarrow q$，所以 q 是 p 的必要条件.

(4)当 $x=-2$ 时，$-2\leqslant x\leqslant5$ 成立，但是 $-1\leqslant x\leqslant5$ 不成立，所以 $p\not\Rightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(5)0 是自然数，但是 0 不是正整数，所以 $p\not\Rightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(6)等边三角形一定是等腰三角形，所以 $p\Rightarrow q$，所以 q 是 p 的必要条件.

【应用迁移】

1.AC

2.BC **解析**：由 $x+1>0$，得 $x>-1$.

当 $x=0$ 时，$x>-1$ 成立，但是推不出 $x>2$ 成立，故选项 A 错误；

$x>-1$ 成立必定可以推出 $x>-2$ 成立，故选项 B 正确；

$x>-1$ 成立必定可以推出 $x>-4$ 成立，故选项 C 正确；

当 $x=-0.5$ 时，$x>-1$ 成立，但是推不出 $x>0$ 成立，故选项 D 错误.故选 BC.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)$\{a\mid a\leqslant1\}$ **解析**：因为 $x>1\Rightarrow x>a$，所以 $a\leqslant1$.

(2)**解**：由题意，得 P 是 Q 的子集，则 $\begin{cases}3m-2<5m+2,\\3m-2\leqslant-2,\\5m+2\geqslant1,\end{cases}$ 解

得$-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant 0$.

所以实数m的取值范围是$\left\{m\left|-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant 0\right.\right\}$.

[一题多思]

思考1.提示：因为$x>a\Rightarrow x>1$，所以$a\geqslant 1$.故答案为$\{a\mid a\geqslant 1\}$.

思考2.提示：已知p的充分条件为q，则Q是P的子集.

当$3m-2>5m+2$，即$m<-2$时，$Q=\varnothing$，满足题意；

当$3m-2\leqslant 5m+2$，即$m\geqslant -2$时，

由题意得$\begin{cases}3m-2>-2,\\5m+2<4,\end{cases}$解得$0<m<\frac{2}{5}$.

综上，实数m的取值范围是$\left\{m\left|m<-2,\text{或}\ 0<m<\frac{2}{5}\right.\right\}$.

【应用迁移】

1.D

2.B　**解析**：因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，所以$B\subseteq A$，所以$m\geqslant 3$.故选B.

1.4.2　充要条件

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.$p\Leftrightarrow q$　充要条件　2.充要条件　3.充要条件

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　(4)√　2.A

任务型课堂

任务1

1.B　**解析**：由$x^2-3x+2=0$，得$x=1$或$x=2$，所以$x=1$可以推出$x^2-3x+2=0$；$x^2-3x+2=0$不可以推出$x=1$；所以$x=1$是$x^2-3x+2=0$成立的充分不必要条件.故选B.

2.C　**解析**：若$a<0$且$b<0$，则$a\cdot b>0$且$a+b<0$成立，故充分性成立.

若$a\cdot b>0$，则$a<0$且$b<0$或$a>0$且$b>0$.

而$a>0$且$b>0$时，$a+b>0$.

所以由$a\cdot b>0$且$a+b<0$可以推出$a<0$且$b<0$，故必要性成立.

因此“$a<0$且$b<0$”是“$a\cdot b>0$且$a+b<0$”的充要条件.故选C.

任务2

【探究活动】

例1　**证明**：必要性：由于方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一正实数根和一负实数根，设为x_1，x_2，

所以$\Delta=b^2-4ac>0$，且$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$，所以$ac<0$.

充分性：由$ac<0$，可得$\Delta=b^2-4ac>0$，

故方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个不相等的实数根，设为x_1，x_2，则$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$，

所以方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一正实数根和一负实数根.

综上，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a,b,c$是常数，且$a\neq 0)$有一正实数根和一负实数根的充要条件是$ac<0$.

【应用迁移】

证明：充分性：

由$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，

得$2(a^2+b^2+c^2)=2ab+2ac+2bc$，

整理得$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$，

所以$a=b=c$，即$\triangle ABC$是等边三角形.

必要性：

由$\triangle ABC$是等边三角形，得$a=b=c$，

所以$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

故原命题得证.

任务3

【探究活动】

例2　**解**：不存在.因为若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件，则$A=B$，所以$\begin{cases}a>0,\\1-a=0,\\1+a=4,\end{cases}$方程组无解.

所以不存在满足条件的实数a.

[一题多思]

思考1.提示：由题意知，A是B的真子集，

所以$1-a\leqslant 0$且$1+a\geqslant 4$(两等号不能同时取得).

又$a>0$，解得$a\geqslant 3$.

所以实数a存在，且a的取值集合为$M=\{a\mid a\geqslant 3\}$.

思考2.提示：由题意知，B是A的真子集，

所以$1-a\geqslant 0$且$1+a\leqslant 4$(两等号不能同时取得).

又$a>0$，解得$0<a\leqslant 1$.

所以实数a存在，且a的取值集合为$M=\{a\mid 0<a\leqslant 1\}$.

【应用迁移】

1.$\{m\mid m>2\}$

2.**解**：由$x-3<0$，得$x<3$.由$2x-3<m$，得$x<\frac{m+3}{2}$.

因为p是q的充分不必要条件，

所以$\{x\mid x<3\}\subsetneq\left\{x\left|x<\frac{m+3}{2}\right.\right\}$.

所以$3<\frac{m+3}{2}$，解得$m>3$.

所以实数m的取值范围是$\{m\mid m>3\}$.

1.5　全称量词与存在量词

1.5.1　全称量词与存在量词

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.全称量词　$\forall$　全称量词　2.$\forall x\in M,p(x)$

知识点二

1.存在量词　$\exists$　存在量词命题　2.$\exists x\in M,p(x)$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　2.全称量词　假

任务型课堂

任务 1

1.解:(1)(5)中含有全称量词,(4)“自然数的平方是正数”的实质是“任意一个自然数的平方都是正数”,所以(1)(4)(5)是全称量词命题.

(2)中含有“∃”,(3)中含有存在量词,所以(2)(3)是存在量词命题.

2.解:(1)全称量词命题,$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1>0$.

(2)全称量词命题,$\forall a,b\in\mathbf{R}$,$ax+b=0$ 恰有一个解.

(3)存在量词命题,$\exists x,y\in\mathbf{Z}$,$3x-2y=10$.

(4)全称量词命题,$\forall x\in\mathbf{Q}$,$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数.

任务 2

【探究活动】

例 1　解:(1)真命题,因为 $x^2\geqslant 0$,所以 $x^2+1\geqslant 1>\frac{1}{2}$ 恒成立.

(2)真命题,如 $\alpha=0$,$\beta=1$,符合题意.

(3)真命题,如数 -2,-4 等,既是偶数又是负数.

(4)假命题,如边长为 1 的正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$,它的长度不能用正有理数表示.

(5)假命题,因为该方程的判别式 $\Delta=-31<0$,故无实数解.

【应用迁移】

1.AC

2.存在量词命题　真　解析:命题 p 是存在量词命题,当 $x=y=0$ 时,$x^2+y^2=0<1$ 成立,故 p 是真命题.

任务 3

【探究活动】

例 2　解:若命题 p:$\forall x\in B$,$x\in A$ 是真命题,则 $B\subseteq A$.

因为 $B\neq\varnothing$,所以 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

故实数 m 的取值范围为 $\{m\mid 2\leqslant m\leqslant 3\}$.

[一题多思]

思考 1.提示:若命题 p 为真命题,则 $A\cap B\neq\varnothing$.

因为 $B\neq\varnothing$,所以 $m+1\leqslant 2m-1$,即 $m\geqslant 2$.

所以 $\begin{cases}-2\leqslant m+1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant 2m-1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $2\leqslant m\leqslant 4$.

所以 m 的取值范围是 $\{m\mid 2\leqslant m\leqslant 4\}$.

思考 2.提示:不存在.理由如下:

若命题 p:$\forall x\in A$,$x\in B$ 是真命题,

则 $A\subseteq B$,$B\neq\varnothing$.所以 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\leqslant -2,\\ 2m-1\geqslant 5,\end{cases}$ 无解.

所以不存在实数 m,使命题 p 是真命题.

【应用迁移】

解:由题可知,$\frac{1}{x}-a\geqslant 0$ 对 $\forall x\in\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$ 恒成立,

所以 $a\leqslant\left(\frac{1}{x}\right)_{\min}$,$x\in\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$,

所以 $1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2$,即 $a\leqslant 1$.

由 q:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2-a=0$ 为真命题,可知 $\Delta=4-4(2-a)\geqslant 0$,解得 $a\geqslant 1$.

综上,若 p,q 都是真命题,则 $a=1$.

1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\exists x\in M$,$\neg p(x)$

知识点二

$\forall x\in M$,$\neg p(x)$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

2.$\forall a\in\mathbf{R}$,一次函数 $y=x+a$ 的图象都不经过原点

任务型课堂

任务 1

1.A　解析:根据全称量词命题的否定为存在量词命题可知,若命题 p:$\forall x>0$,$x+\frac{2}{x}>1$,则 $\neg p$ 为 $\exists x>0$,$x+\frac{2}{x}\leqslant 1$.故选 A.

2.解:(1)$\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+5\leqslant 0$.

因为 $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$,

所以 p 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

(2)$\neg p$:至少存在一个实数 m,使得方程 $x^2+mx-1=0$ 无实数根.

因为 $\Delta=m^2+4>0$,所以 p 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

(3)$\neg p$:至少存在一个菱形,它的对角线不互相垂直.

因为所有菱形的对角线均互相垂直,

所以 p 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

(4)$\neg p$:方程 $x^2-8x-20=0$ 至少有一个根是奇数.

因为方程的两个根为 -2,10,都不是奇数,

所以 p 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

任务 2

1.D　解析:命题“$\exists x\geqslant 0$,$x^2-x=1$”的否定为“$\forall x\geqslant 0$,$x^2-x\neq 1$”.故选 D.

2.解:(1)原命题的否定为“任意一个平行四边形,它的对角线不互相垂直”.

原命题为真命题,其否定为假命题.

(2)原命题的否定是“所有的三角形都不是等边三角形”.

原命题为真命题,其否定为假命题.

(3)原命题的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+4\neq 0$”,

原命题为假命题,其否定为真命题.

(4)原命题的否定是“$\forall x\in\mathbf{N},x^2-2x+1>0$”.

原命题为真命题,其否定为假命题.

任务 3

【探究活动】

例 **解**:命题“存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$”是假命题,

所以此命题的否定:对任意 $x>1$,$2x+a\geqslant 3$ 是真命题.

因为对任意 $x>1$,都有 $2x+a>2+a$,

所以 $2+a\geqslant 3$,所以 $a\geqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant 1\}$.

[一题多思]

思考 1.提示:由于命题与命题的否定的真假性只能是一真一假,所以当直接判断一个命题的真假困难时,可以转化为判断该命题的否定的真假.

思考 2.提示:由题意知“存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$”是真命题,则存在 $x>1$,使得 $a<3-2x$,故 $a<(3-2x)_{\max}$.

因为 $x>1$,所以 $a<1$.

故实数 a 的取值范围是$\{a\mid a<1\}$.

【应用迁移】

解:由题意可知,“$\exists x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1=0$”是真命题,

等价于方程 $ax^2+2x+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解,

则 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\neq 0,\\4-4a\geqslant 0,\end{cases}$

所以 $a\leqslant 1$.

故实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\leqslant 1\}$.

第二章　一元二次函数、方程和不等式

2.1　等式性质与不等式性质

第 1 课时　不等关系与比较大小

问题式预习

【知识清单】

知识点一

等式　不等式

知识点二

(1)$a<b$　$a>b$　(2)$a>b$　$a=b$　$a<b$　$a>b$　$a-b=0$　$a-b<0$

知识点三

$\geqslant$　$a=b$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√　**2.**$m\geqslant n$

任务型课堂

任务 1

1.B　**2.**A

3.解:依题意,得 $\begin{cases}x>0,\\y>0,\\x>3y,\\(x+10)(y+10)<450.\end{cases}$

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**:$(x^3-1)-(2x^2-2x)=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为 $x<1$,所以 $x-1<0$.

又$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$,

所以$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0$,即 $x^3-1<2x^2-2x$.

[一题多思]

思考 1.提示:作差变形可采用配方、因式分解、通分、分母有理化等方法;变形过程中要注意保持等价性与正确性.

思考 2.提示:$(x^3-1)-(2x^2-2x)=x^3-x^2-(x^2-2x+1)=x^2(x-1)-(x-1)^2=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

所以当 $x>1$ 时,$x-1>0$,则$(x-1)\cdot\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$,即 $x^3-1>2x^2-2x$;

当 $x=1$ 时,$x-1=0$,则$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=0$,即 $x^3-1=2x^2-2x$;

当 $x<1$ 时,$x-1<0$,则$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0$,即 $x^3-1<2x^2-2x$.

综上,当 $x>1$ 时,$x^3-1>2x^2-2x$;

当 $x=1$ 时,$x^3-1=2x^2-2x$;

当 $x<1$ 时,$x^3-1<2x^2-2x$.

思考 3.提示:因为$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$,

所以当 $x=0$ 时,$\frac{1}{1+x}=1-x$;

当 $1+x<0$,即 $x<-1$ 时,$\frac{x^2}{1+x}<0$,所以$\frac{1}{1+x}<1-x$;

当 $1+x>0$ 且 $x\neq 0$,即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时,$\frac{x^2}{1+x}>0$,所以$\frac{1}{1+x}>1-x$.

综上,当 $x=0$ 时,$\frac{1}{1+x}=1-x$;

当 $x<-1$ 时,$\frac{1}{1+x}<1-x$;

当 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时,$\frac{1}{1+x}>1-x$.

【应用迁移】

1.C　**解析**:因为 $M-N=(x^2-3x+3)-(x-1)=x^2-4x+4=(x-2)^2\geqslant 0$,所以 $M\geqslant N$.故选 C.

2.A　**解析**:设两次加油时的油价分别为 $x,y(x,y>0$,且

$x\neq y$),乙每次加油的体积为$a(a>0)$,甲每次加油的钱数为$b(b>0)$.

乙加油的平均油价为$\frac{ax+ay}{2a}=\frac{x+y}{2}$,甲加油的平均油价为$\frac{2b}{\frac{b}{x}+\frac{b}{y}}=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$.

因为$\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$,所以$\frac{x+y}{2}>\frac{2xy}{x+y}$,即甲的方案更经济.故选A.

任务3

【探究活动】

例2 **证明**:(1)$\frac{b+1}{a+1}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)a}=\frac{ab+a-ab-b}{(a+1)a}=\frac{a-b}{(a+1)a}$.

因为$a>b>1$,所以$a-b>0$,$a+1>0$,$a>0$,

所以$\frac{a-b}{(a+1)a}>0$,即$\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$.

(2)$a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=a-b+\frac{b-a}{ab}=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}$.

因为$a>b>1$,所以$a-b>0$,$ab>1$,

所以$(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}>0$,即$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$.

【应用迁移】

证明:(方法一)因为$a>0$,所以$a+\frac{1}{a}=(\sqrt{a})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=2$.

当且仅当$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}$,即$a=1$时,等号成立.

(方法二)因为$a+\frac{1}{a}-2=(\sqrt{a})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 0$,所以$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

第2课时 不等式的性质

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$b<a$ (2)$a>c$ (3)$b+c$ (4)bc < (5)> (6)>

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ (4)× **2.**B

任务型课堂

任务1

1.D

2.D **解析**:对于A,若$c=0$,则$ac=0=bc$,故选项A为假命题;

对于B,若$a=-2$,$b=-1$,则$a^2>b^2$,故选项B为假命题;

对于C,若$a=2$,$b=1$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,故选项C为假命题;

对于D,由$a<b<0$,可得$\frac{a}{b}>1$,故选项D为真命题.故选D.

3.CD

任务2

【探究活动】

例1 **证明**:因为$c<d<0$,所以$-c>-d>0$.

又因为$a>b>0$,所以$a-c>b-d>0$.

所以$(a-c)^2>(b-d)^2>0$.

两边同乘$\frac{1}{(a-c)^2(b-d)^2}$,得$\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又$e<0$,所以$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

【应用迁移】

1.证明:因为$a>b>c>d$,所以$a>b$,$-d>-c$,

所以$a-d>b-c>0$,则$\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$.

2.(1)**解**:得出不等式$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}(b>a>0,m>0)$.

证明:$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{b(b+m)}=\frac{ab+am-ab-bm}{b(b+m)}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}$.

因为$b>a>0$,所以$a-b<0$,$b>0$.

因为$m>0$,所以$b+m>0$.

所以$\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$,所以$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

(2)**证明**:因为a,b,c为三角形的三边长,则有$a+b>c$,$a+c>b$,$b+c>a$,

由(1)中已证不等式可得$\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}$,$\frac{b}{a+c}<\frac{b+b}{a+b+c}$,$\frac{c}{a+b}<\frac{c+c}{a+b+c}$,

将以上不等式左、右两边分别相加得$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a+a}{a+b+c}+\frac{b+b}{a+b+c}+\frac{c+c}{a+b+c}=2$,

所以$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

任务3

【探究活动】

例2 (1)$-4<x-y<2$ $1<3x+2y<18$ **解析**:因为$-1<x<4$,$2<y<3$,所以$-3<-y<-2$,所以$-4<x-y<2$.

由$-1<x<4$,$2<y<3$,

得$-3<3x<12$,$4<2y<6$,

所以$1<3x+2y<18$.

(2)**解**:因为$1<a<2$,$2<b<3$,

所以 $3<3a<6$，$-3<-b<-2$，$\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，

所以 $0<3a-b<4$，$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<1$.

[一题多思]

思考 1.提示：令 $m=x-y$，$n=4x-y$，则 $9x-y=\frac{8}{3}n-\frac{5}{3}m$，得 $-1\leqslant 9x-y\leqslant 20$.

思考 2.提示：因为 $2<b<3$，所以 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

又 $-6<a<8$，则

①当 $0\leqslant a<8$ 时，$0\leqslant\frac{a}{b}<4$；

②当 $-6<a<0$ 时，$0<-a<6$，所以 $0<-\frac{a}{b}<3$，所以 $-3<\frac{a}{b}<0$.综上，$-3<\frac{a}{b}<4$.

【应用迁移】

1.A **解析**：因为 $4<a<9$，$-2<b<-1$，所以 $2<\sqrt{a}<3$，可得 $4<2\sqrt{a}<6$.

由不等式的基本性质可得 $2<2\sqrt{a}+b<5$.故选 A.

2.解：因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，$-2\leqslant\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，

所以 $-6\leqslant 2\alpha\leqslant-2$，$\frac{1}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}\leqslant 1$，

所以 $-\frac{23}{4}\leqslant 2\alpha-\frac{\beta}{2}\leqslant-1$.

又因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，所以 $\frac{2}{3}\leqslant-\frac{2\alpha}{3}\leqslant 2$，

所以 $-\frac{4}{3}\leqslant\beta-\frac{2\alpha}{3}\leqslant\frac{3}{2}$.

2.2 基本不等式

第 1 课时 基本不等式

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.(2)算术 几何 **2.**(2)$\leqslant$ (3)$a=b$ (4)不小于

知识点二

(1)$2\sqrt{P}$ (2)$\frac{1}{4}S^2$

【概念辨析】

1.(1)$\times$ (2)$\times$ (3)$\surd$ (4)$\times$ **2.**81

任务型课堂

任务 1

1.B **2.A** **3.B**

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)A **解析**：m，n 为互不相等的正实数，则 $\frac{n}{m}\neq\frac{m}{n}$，所以 $A=\frac{n}{m}+\frac{m}{n}>2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=2$，$B=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2\leqslant 2$.当 $x=2$ 时，$B_{\max}=2$，所以 $A>B$.故选 A.

(2)B **解析**：由题意可得，$a+b=2x$，$ab=y^2$，$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}z$，且 a，$b>0$.

由基本不等式的关系可知 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $x\geqslant y$.

因为 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)$，所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $2z^2\geqslant\frac{4x^2}{2}$，所以 $z\geqslant x$，所以 $z\geqslant x\geqslant y$.故选 B.

【应用迁移】

1.C **2.A**

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)4 **解析**：因为 $x>0$，所以 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立.因此 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值为 4.

(2)$\frac{1}{4}$ **解析**：由题意知 $1-2x>0$，则 $2x(1-2x)\leqslant\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $2x=1-2x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立.因此 $2x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

[一题多思]

思考 1.提示：由题可得 $x+\frac{4}{x}=-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)$，

因为 $x<0$，所以 $-x>0$，

故有 $-x+\frac{4}{-x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\left(\frac{4}{-x}\right)}=4$，

所以 $-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)\leqslant-4$，当且仅当 $-x=\frac{4}{-x}$，即 $x=-2$ 时，等号成立.

故 $x+\frac{4}{x}$ 的最大值为 -4.

思考 2.提示：能.因为 $0<x<\frac{1}{2}$，所以 $1-2x>0$，

所以 $\frac{1}{4}\times 2x(1-2x)\leqslant\frac{1}{4}\times\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

当且仅当 $2x=1-2x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立.

故 $\frac{1}{2}x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

【应用迁移】

1.B **解析**：因为 $a>0$，所以 $a+\frac{2}{a}+3\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $a=\frac{2}{a}$，即 $a=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 a

$+\frac{2}{a}+3$ 的最小值是 $2\sqrt{2}+3$.故选 B.

2.A　**解析**：当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$y=x(1-3x)=\frac{1}{3}\times 3x\times(1-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left(\frac{3x+1-3x}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$，当且仅当 $3x=1-3x$，即 $x=\frac{1}{6}$ 时，等号成立，所以 $y=x(1-3x)$ 的最大值为 $\frac{1}{12}$.故选 A.

第 2 课时　基本不等式的应用

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　(1)C　**解析**：设底面相邻两边的长分别为 x m，y m，$x>0$，$y>0$，总造价为 T 元，则 $xy\times 1=4$，即 $xy=4$.所以 $T=4\times 20+(2x+2y)\times 1\times 10=80+20(x+y)\geqslant 80+20\times 2\sqrt{xy}=80+20\times 4=160$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立.

故该容器的最低总造价是 160 元.

(2)**解**：设矩形围栏的长和宽分别为 x m，y m，则围栏的长度为 $2(x+y)$ m.

(方法一)由题意可得 $xy=16$，

由 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，可知 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=8$，

所以 $2(x+y)\geqslant 16$，当且仅当 $x=y=4$ 时，等号成立.

因此，当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时，所用围栏最省，所需围栏的最短长度为 16 m.

(方法二)由题意可得 $xy=16$，则 $y=\frac{16}{x}$，

所以 $2(x+y)=2\left(x+\frac{16}{x}\right)\geqslant 2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=16$，当且仅当 $x=\frac{16}{x}$，即 $x=4$ 时，等号成立，此时 $y=4$.

因此，当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时，所用围栏最省，所需围栏的最短长度为 16 m.

[一题多思]

思考 1.提示：设矩形围栏的长为 a m，宽为 b m，且面积为 64 m^2，即 $ab=64$，则 $b=\frac{64}{a}$，所以矩形游乐园的周长为 $2a+2b=2a+\frac{128}{a}\geqslant 2\sqrt{2a\cdot\frac{128}{a}}=32$，当且仅当 $2a=\frac{128}{a}$，即 $a=8$ 时，等号成立，此时 $b=8$.

因此，所用围栏长度的最小值为 32 m.

思考 2.提示：设游乐园的长为 x m，宽为 y m.

由已知得 $2(x+y)=12$，故 $x+y=6$，面积为 xy.

由 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{6}{2}=3$，可得 $xy\leqslant 9$，当且仅当 $x=y=3$ 时，等号成立.

因此，当游乐园为边长为 3 m 的正方形时，面积最大，最大面积为 9 m^2.

【应用迁移】

解：设处理池的长和宽分别为 x m，y m，高为 h m，总造价为 z 元，则 $xy=150(0<x\leqslant 16,0<y\leqslant 16)$，

$z=(2x+2y)h\times 400+2yh\times 248+150\times 80$

$=(800x+1\ 296y)h+12\ 000$

$\geqslant 2\sqrt{800x\times 1\ 296y}h+12\ 000=14\ 400\sqrt{3}h+12\ 000$，

又 $xy=150$，当且仅当 $800x=1\ 296y$，即 $x=9\sqrt{3}<16$，$y=\frac{50\sqrt{3}}{9}<16$ 时，等号成立.

故长为 $9\sqrt{3}$ m，宽为 $\frac{50\sqrt{3}}{9}$ m 时总造价最低.

任务 2

【探究活动】

例 2　(1)A　**解析**：因为正数 x，y 满足 $x+2y=3xy$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$，

所以 $2x+9y=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+9y)=\frac{1}{3}\times\left(13+\frac{18y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\times\left(13+2\sqrt{\frac{18y}{x}\times\frac{2x}{y}}\right)=\frac{25}{3}$，

当且仅当 $\frac{18y}{x}=\frac{2x}{y}$，且 $x+2y=3xy$，即 $x=\frac{5}{3}$，$y=\frac{5}{9}$ 时，等号成立，所以 $2x+9y$ 的最小值是 $\frac{25}{3}$.故选 A.

(2)**解**：因为 $x<2$，所以 $2-x>0$，

所以 $x+\frac{4}{x-2}=-\left[(2-x)+\frac{4}{2-x}\right]+2\leqslant -2\sqrt{(2-x)\cdot\frac{4}{2-x}}+2=-2$.

当且仅当 $2-x=\frac{4}{2-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立.

故 $x+\frac{4}{x-2}$ 的最大值为 -2.

【应用迁移】

1.D　**解析**：因为 $a+2b=1$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+2b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{b}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4.故选 D.

2.A　**解析**：因为 $x<1$，所以 $1-x>0$，所以 $2x+\frac{2}{x-1}=2(x-1)+\frac{2}{x-1}+2=-2\left[(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]+2\leqslant -4\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}+2=-2$，当且仅当 $1-x=\frac{1}{1-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，所以 $2x+\frac{2}{x-1}$ 的最大值是 -2.故选 A.

任务 3

【探究活动】

例 3　**证明**：因为 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{ab}=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

$\geqslant 4+4\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立.

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$.

【应用迁移】

1.证明：因为$2a+2b+2c=(a+b)+(b+c)+(a+c)\geqslant 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$，

当且仅当$a=b=c$时，等号成立，

所以$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

2.证明：因为a,b,c是正数，且$a+b+c=1$，

所以$\frac{1}{a}-1=\frac{b+c}{a}>0$，$\frac{1}{b}-1=\frac{a+c}{b}>0$，$\frac{1}{c}-1=\frac{a+b}{c}>0$，所以$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}=8$，当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$时，等号成立.

又因为a,b,c是互不相等的正数，

所以$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)>8$.

微专题培优(二)　利用基本不等式求最值

类型 1

例 1　C　**解析**：由$m>-2,n>1$，可得$m+2>0,n-1>0$，

又$m+n=3$，所以$4=m+2+n-1\geqslant 2\sqrt{(m+2)(n-1)}$，

当且仅当$m+2=n-1$，即$m=0,n=3$时，等号成立，因此$\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}=\sqrt{\left(\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}\right)^2}=\sqrt{4+2\sqrt{(m+2)(n-1)}}\leqslant\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

所以$\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}$的最大值为$2\sqrt{2}$.故选 C.

【对点训练】

7　**解析**：由题意，得$x^2+\frac{16}{x^2+1}=x^2+1+\frac{16}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{16}{x^2+1}}-1=7$，

当且仅当$x^2+1=\frac{16}{x^2+1}$，即$x^2=3$时，等号成立，所以$x^2+\frac{16}{x^2+1}$的最小值为 7.

类型 2

例 2　B　**解析**：因为$a>0>b$，所以$-b>0$.因为$a-b=2$，所以$a+1+(-b)=3$，即$\frac{a+1}{3}+\frac{-b}{3}=1$，

$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}=\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}\right]\times 1=\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}\right]\left[\frac{a+1}{3}+\frac{-b}{3}\right]=\frac{1}{3}+\frac{a+1}{3(-b)}+\frac{-b}{3(a+1)}+\frac{1}{3}\geqslant 2\sqrt{\frac{a+1}{3(-b)}\times\frac{-b}{3(a+1)}}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，当且仅当$a+1=-b$，即$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$时，等号成立，此时$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b}$的最小值为$\frac{4}{3}$.故选 B.

【对点训练】

C　**解析**：由$m(2-n)+n=0$，可得$2m+n=mn$，所以$\frac{2}{n}+\frac{1}{m}=1$，所以$m+2n=(m+2n)\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{m}\right)=\frac{2m}{n}+4+1+\frac{2n}{m}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2m}{n}\cdot\frac{2n}{m}}=9$，当且仅当$m=n=3$时，等号成立，故$m+2n$的最小值为 9.故选 C.

类型 3

例 3　A　**解析**：由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，可得$x=\frac{y}{y-1}>0$，故$y>1$，

则$4xy-3x=\frac{y}{y-1}\cdot[4(y-1)+1]=4(y-1)+\frac{1}{y-1}+5\geqslant 2\sqrt{4(y-1)\cdot\frac{1}{y-1}}+5=9$，

当且仅当$x=3,y=\frac{3}{2}$时取等号，故$4xy-3x$的最小值为 9.故选 A.

【对点训练】

2　**解析**：由$x+\frac{2}{y}=4$，得$x=4-\frac{2}{y}$，

则$\begin{cases}y>0,\\ x=4-\frac{2}{y}>0,\end{cases}$解得$y>\frac{1}{2}$.

$\frac{x}{y}=\frac{4-\frac{2}{y}}{y}=-\frac{2}{y^2}+\frac{4}{y}=-2\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+2$，

当$\frac{1}{y}=1$，即$y=1$时，$\frac{x}{y}$取得最大值 2.

类型 4

例 4　$\frac{3}{4}$　**解析**：令$\frac{1}{a-1}=x$，$\frac{1}{2b-1}=y$，则$x>0,y>0$，$a=\frac{x+1}{x}$，$b=\frac{y+1}{2y}$，$x+2y=1$，所以$x+1+2y+2=4$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{x}{x+1}+\frac{2y}{y+1}=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{2(y+1)-2}{y+1}=3-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{y+1}=3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+1}\right)(x+1+2y+2)=3-\frac{1}{4}\left[5+\frac{2(y+1)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{y+1}\right]\leqslant 3-\frac{1}{4}\left[5+2\sqrt{\frac{2(y+1)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{y+1}}\right]=\frac{3}{4}$，当且仅当$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，即$a=4,b=2$时，等号成立.所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最大值为$\frac{3}{4}$.

【对点训练】

$\frac{12\sqrt{2}+20}{3}$　**解析**：将$x(x+y)=2+2y^2$化为$(x+2y)(x$

$-y)=2$.

令 $x+2y=m$ ①，$x-y=n$ ②，则 $mn=2$.

联立①②可得 $x=\frac{m+2n}{3}$，$y=\frac{m-n}{3}$，

则 $7x^2-y^2=7\times\frac{(m+2n)^2}{9}-\frac{(m-n)^2}{9}=\frac{1}{3}\left(2m^2+\frac{36}{m^2}+20\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2m^2\cdot\frac{36}{m^2}}+20\right)=\frac{12\sqrt{2}+20}{3}$，当且仅当 $2m^2=\frac{36}{m^2}$，即 $m^2=3\sqrt{2}$，$n^2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，等号成立.所以 $7x^2-7y^2$ 的最小值为 $\frac{12\sqrt{2}+20}{3}$.

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

第1课时 一元二次不等式的解法

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.一个 2 **2.**实数 x 零点

知识点二

$-\frac{b}{2a}$ **R** $\varnothing$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ (4)× **2.**$\left\{x\left|-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1 **解**：(1)因为 $\Delta=7^2-4\times2\times3=25>0$，

所以方程 $2x^2+7x+3=0$ 有两个不相等的实数根.由 $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)=0$，得 $x_1=-3$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

又因为二次函数 $y=2x^2+7x+3$ 的图象开口向上，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\left|x<-3\text{，或 }x>-\frac{1}{2}\right.\right\}$.

(2)原不等式可化为 $\left(2x-\frac{9}{2}\right)^2\leqslant0$，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\left|x=\frac{9}{4}\right.\right\}$.

(3)原不等式可化为 $2x^2-3x+2>0$，

因为 $\Delta=9-4\times2\times2=-7<0$，

所以方程 $2x^2-3x+2=0$ 无实数根.

又因为二次函数 $y=2x^2-3x+2$ 的图象开口向上，所以原不等式的解集为 **R**.

(4)原不等式可化为 $x^2-6x+10<0$，

$\Delta=(-6)^2-40=-4<0$，

所以方程 $x^2-6x+10=0$ 无实数根.

又因为二次函数 $y=x^2-6x+10$ 的图象开口向上，

所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

【应用迁移】

解：(1)原不等式可化为 $2x^2-3x-2<0$，

所以 $(2x+1)(x-2)<0$，

解得 $-\frac{1}{2}<x<2$.

故原不等式的解集是 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$.

(2)原不等式可化为 $2x^2-x-1\geqslant0$，

所以 $(2x+1)(x-1)\geqslant0$，

解得 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant1$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\left|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{，或 }x\geqslant1\right.\right\}$.

(3)因为 $\Delta=(-2)^2-4\times3=-8<0$，

故原不等式的解集是 **R**.

任务2

【探究活动】

例2 (1)BCD **解析**：根据题意，可知 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 -1，3.

由根与系数的关系得 $\begin{cases}2=-\frac{b}{a},\\-3=\frac{c}{a}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2a,\\c=-3a.\end{cases}$

由题意可得 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，则 $a<0$，故A错误.

$2a+b+c=2a+(-2a)+(-3a)=-3a>0$，故B正确.

$a+b+c=a+(-2a)+(-3a)=-4a>0$，故C正确.

$cx^2-bx+a=-3ax^2+2ax+a<0$，两边同时除以 $-a$，得 $3x^2-2x-1<0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<1$，故D正确.

故选BCD.

(2)**解**：由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$ 可知 $a<0$，且2和3是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可知 $\frac{b}{a}=-5$，$\frac{c}{a}=6$，故 $\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$.

又由 $a<0$ 知 $c<0$，

故不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可变形为 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$，即 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0$，

解得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\left|x<\frac{1}{3}\text{，或 }x>\frac{1}{2}\right.\right\}$.

[一题多思]

思考1.提示：由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$ 可知 $a<0$，且2和3是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，

由根与系数的关系知 $\frac{b}{a}=-5$，$\frac{c}{a}=6$，

所以 $c<0$，$\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$，

故不等式 $cx^2-bx+a>0$ 可变形为 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$，

即 $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right.\right\}$.

思考 2.提示：（方法一）由 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2\right.\right\}$ 知 $a<0$，

且 $-\frac{1}{3}$，2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得

$\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{5}{3}=-\frac{b}{a}$，$\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=-\frac{2}{3}=\frac{c}{a}$，

所以 $b=-\frac{5}{3}a$，$c=-\frac{2}{3}a$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可转化为 $\left(-\frac{2}{3}a\right)x^2+\left(-\frac{5}{3}a\right)x+a<0$，即 $2ax^2+5ax-3a>0$.

又因为 $a<0$，所以 $2x^2+5x-3<0$，解得 $-3<x<\frac{1}{2}$.

故所求不等式的解集为 $\left\{x\left|-3<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

（方法二）由已知可得 $a<0$，且 $-\frac{1}{3}$，2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，由根与系数的关系可得 $\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{5}{3}=-\frac{b}{a}$，$\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{2}{-3}=\frac{c}{a}$，所以 $c>0$.

设方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个根分别为 x_1，x_2，

则 $x_1+x_2=-\frac{b}{c}$，$x_1x_2=\frac{a}{c}$，

其中 $-\frac{b}{c}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{5}{2}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=-\frac{3}{2}$，

所以 $x_1=-3$，$x_2=\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\left|-3<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

【应用迁移】

1.A　解析：由题意可得 -1，$\frac{1}{2}$ 是 $ax^2+bx-1=0$ 的解，所以 $\begin{cases}-1+\frac{1}{2}=-\frac{b}{a},\\-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=3$.故选 A.

2.解：因为不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 4\}$，

所以 $a<0$，且 -3，4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得 $\begin{cases}-3+4=-\frac{b}{a},\\-3\times 4=\frac{c}{a},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-a,\\c=-12a.\end{cases}$

所以不等式 $bx^2+2ax-c-3b\geqslant 0$ 可化为 $-ax^2+2ax+15a\geqslant 0$，即 $x^2-2x-15\geqslant 0$，

解得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 5$.

故所求不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 5\}$.

任务 3

【探究活动】

例 3　解：(1) 当 $a=0$ 时，$1\geqslant 0$ 恒成立，符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，只需 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4a^2-4a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 1\}$.

(2) 当 $a=0$ 时，$x+1<0\Rightarrow x<-1$，符合题意；

当 $a<0$ 时，$ax^2+(1-a)x+1<0$ 一定有解，符合题意；

当 $a>0$ 时，只需 $\Delta=(1-a)^2-4a>0$，

得 $0<a<3-2\sqrt{2}$ 或 $a>3+2\sqrt{2}$.

综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a<3-\sqrt{2}$，或 $a>3+2\sqrt{2}\}$.

(3) 当 $a=0$ 时，不等式为 $-3>0$，解集为 $\varnothing$；

当 $a\neq 0$ 时，只需 $\begin{cases}a<0,\\\Delta=4a^2+12a\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $-3\leqslant a<0$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid -3\leqslant a\leqslant 0\}$.

【应用迁移】

D　**解析**：当 $a=2$ 时，$-4<0$ 恒成立，则 $a=2$；

当 $a\neq 2$ 时，$\begin{cases}a-2<0,\\\Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<2$.

综上所述，$-2<a\leqslant 2$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a\mid -2<a\leqslant 2\}$.故选 D.

第 2 课时　一元二次不等式的应用

任务型课堂

任务 1

1.D　解析：由 $\frac{2x+1}{x-1}\geqslant 0$，得 $\begin{cases}(2x+1)(x-1)\geqslant 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x>1$.故选 D.

2.C　解析：移项得 $\frac{3-x}{x+1}-1\leqslant 0$，即 $\frac{3-x-(x+1)}{x+1}=\frac{2-2x}{x+1}\leqslant 0$，所以 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，

该不等式等价于 $(x-1)(x+1)\geqslant 0$ 且 $x+1\neq 0$，所以解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 1\}$.故选 C.

任务 2

【探究活动】

例 1　解：设增加成本后的日利润为 y 元.

$y=[60\times(1+0.5x)-40\times(1+x)]\times 1\,000\times(1+0.8x)=2\,000(-4x^2+3x+10)(0<x<1)$.

要保证日利润有所增加，

则 $y>(60-40)\times 1\,000$，且 $0<x<1$，

即 $\begin{cases}-4x^2+3x>0,\\0<x<1,\end{cases}$ 解得 $0<x<75\%$.

所以，为使日利润有所增加，x 的取值范围为 $\{x|0<x<75\%\}$.

【应用迁移】

解：设花卉带的宽度为 x m，则 $\begin{cases}0<2x<8,\\0<2x<6,\end{cases}$ 可得 $0<x<3$，

所以，草坪的长为 $(8-2x)$m，宽为 $(6-2x)$m，

所以草坪的面积为 $(8-2x)(6-2x)=4(4-x)(3-x)$.

因为草坪的面积不超过总面积的一半，所以 $4(4-x)(3-x)\leqslant\frac{1}{2}\times 6\times 8$，

整理可得 $x^2-7x+6\leqslant 0$，解得 $1\leqslant x\leqslant 6$.

又由 $0<x<3$，可得 $1\leqslant x<3$.

所以，花卉带的宽度至少为 1 m.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：①当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x>1$.

②当 $a\neq 0$ 时，原不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$.

当 $a<0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，

因为 $\frac{1}{a}<1$，所以 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$.

当 $a>0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

若 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$，则 $\frac{1}{a}<x<1$；

若 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$，则 $x\in\varnothing$；

若 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$，则 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{，或 }x>1\right\}$；当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：因为 $a>0$，所以原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，所以方程 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$ 的两个根分别为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

①当 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$ 时，解得 $x<1$ 或 $x>\frac{1}{a}$；

②当 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，原不等式即为 $(x-1)^2>0$，解得 $x\neq 1$；

③当 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，解得 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<1\text{，或 }x>\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x\neq 1\}$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{，或 }x>1\right\}$.

思考 2.提示：因为 $a<0$，所以原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，所以方程 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$ 的两个根分别为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

因为 $\frac{1}{a}<1$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

【应用迁移】

1.B

2.解：若 $a=0$，则原不等式为 $-2x<0$，故解集为 $\{x|x>0\}$.

若 $a\neq 0$，$\Delta=4-4a^2$. 分情况讨论：

①若 $a>0$，

当 $\Delta>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $ax^2-2x+a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $\Delta=0$，即 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $\Delta<0$，即 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$.

②若 $a<0$，

当 $\Delta>0$，即 $-1<a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\text{，或 }x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $\Delta=0$，即 $a=-1$ 时，原不等式可化为 $(x+1)^2>0$，

所以原不等式的解集为 $\{x|x\neq -1\}$；

当 $\Delta<0$，即 $a<-1$ 时，原不等式的解集为 **R**.

综上所述，当 $a\geqslant 1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x>0\}$；

当 $-1<a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\text{，或 }x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $a=-1$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x\neq -1\}$；

当 $a<-1$ 时，原不等式的解集为 **R**.

第三章　函数的概念与性质

3.1　函数的概念及其表示

3.1.1　函数的概念

第 1 课时　函数的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)非空的实数集　任意一个数 x　唯一确定的数 y　$f:A\to B$

(2)$y=f(x)$　(3)取值范围 A　(4)$\{f(x)\mid x\in A\}$

知识点二

(1)$ax+b$　(2)$\left\{y\,\middle|\,y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$　ax^2+bx+c

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)×　**2.**$\{2,3,4,5,6\}$

任务型课堂

任务 1

1.BD　**解析**：对于 A，因为 $x=0$，$y=0$，所以该关系是函数关系，故选项 A 不符合题意；

对于 B，函数的定义域包括 0，当 $x=0$ 时，没有对应的 y 值，所以该关系不是函数关系，故选项 B 符合题意；

对于 C，因为对任意的 x 值，有唯一的 y 值与之对应，所以该关系是函数关系，故选项 C 不符合题意；

对于 D，当 $x=1$ 时，有两个 y 值与之对应，所以该关系不是函数关系，故选项 D 符合题意．故选 BD.

2.B　**3.**C

任务 2

1.AD

2.C　**解析**：由 $x\in\{-1,0,1\}$，代入 $f(x)=x^2$，得 $f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$．根据集合的互异性，函数 $f(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$．故选 C.

3.$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4$，或 $5\leqslant x\leqslant 8\}$　$\{y\mid -4\leqslant y\leqslant 3\}$

任务 3

解：设矩形的长为 x，对角线长为 $f(x)$，那么 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

其中 x 的取值范围 $A=\{x\mid x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)\mid f(x)\geqslant 2\sqrt{5}\}$，对应关系 f 把每一个矩形的长 x，对应到唯一确定的对角线长 $\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

[一题多思]

思考 1.提示：能．设矩形的长为 x，宽为 $f(x)$，那么 $f(x)=\dfrac{10}{x}$．其中 x 的取值范围 $A=\{x\mid x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)\mid f(x)>0\}$，对应关系 f 把每一个矩形的长 x，对应到唯一确定的宽 $\dfrac{10}{x}$.

思考 2.提示：能．设矩形的长为 x，周长为 $f(x)$，那么 $f(x)=2x+\dfrac{20}{x}$．其中 x 的取值范围 $A=\{x\mid x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)\mid f(x)\geqslant 4\sqrt{10}\}$，对应关系 f 把每一个矩形的长 x，对应到唯一确定的周长 $2x+\dfrac{20}{x}$.

第 2 课时　函数概念的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$[a,b]$　(a,b)

知识点二

(1)定义域、对应关系和值域

(2)定义域　对应关系

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　**2.**$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　**解**：(1)要使函数有意义，

则有 $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ \dfrac{2}{x+1}\geqslant 0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>-1$ 且 $x\neq 1$.

所以这个函数的定义域为 $\{x\mid x>-1$，且 $x\neq 1\}$.

(2)要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\ 1-x\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq -1$.

所以这个函数的定义域为 $\{x\mid x\leqslant 1$，且 $x\neq -1\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：求函数的定义域，其实质是求使解析式有意义的未知数的取值集合.

思考 2.提示：函数的定义域应是使解析式本身有意义且符合实际意义的实数的集合.

思考 3.提示：不变.

【应用迁移】

A　**解析**：根据题意 $\begin{cases}2x-6\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>3$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$．故选 A.

任务 2

【探究活动】

例 2　**解**：因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，所以 $f(2)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$.

因为 $g(x)=x^2+2$，

所以 $g(2)=2^2+2=6$.

所以 $f(g(2))=f(6)=\dfrac{1}{1+6}=\dfrac{1}{7}$.

【应用迁移】

D　**解析**：由题可得 $g(3)=3^2=9$，则 $f(g(3))=f(9)=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$.故选 D.

任务 3

【探究活动】

例 3　**解**：(1)在定义域 **R** 上，$f(x)=|x|$ 和 $\varphi(t)=\sqrt{t^2}=|t|$ 的对应关系完全相同，是同一个函数.

(2)$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 **R**，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，两者定义域不同，不是同一个函数.

(3)$f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，不是同一个函数.

(4)$f(x)$ 的定义域为 **R**，$g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，不是同一个函数.

【应用迁移】

BCD

任务 4

【探究活动】

例 4　(1)$[-1,1]$　**解析**：令 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 3$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2)$(3,5)$　**解析**：因为 $f(x+1)$ 的定义域为 $(2,4)$，所以 $2<x<4$，则 $3<x+1<5$，即 $f(x)$ 的定义域为 $(3,5)$.

(3)$\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$　**解析**：由 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $[1,3]$，得 $x\in[1,3]$，所以 $x^2\in[1,9]$，所以 $x^2-1\in[0,8]$，故 $f(x)$ 的定义域为 $[0,8]$.令 $2x-1\in[0,8]$，得 $2x\in[1,9]$，即 $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$，所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$.

【应用迁移】

1.D

2.B　**解析**：由 $\begin{cases}-1\leqslant x+1\leqslant 1,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant x<0$，所以函数 $y=\frac{f(x+1)}{x}$ 的定义域是 $[-2,0)$.故选 B.

3.1.2　函数的表示法

第 1 课时　函数的表示法

问题式预习

【知识清单】

知识点

解析式　表格　图象

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　**2.**$[-2,3]$

任务型课堂

任务 1

1.D　**2.**D　**3.**1　2

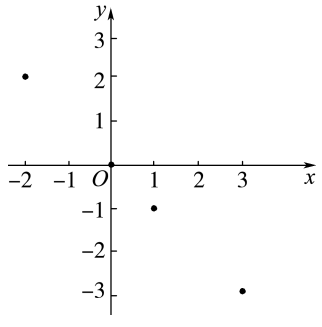
任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：(1)列表：

x	0	1	−2	3
y	0	−1	2	−3

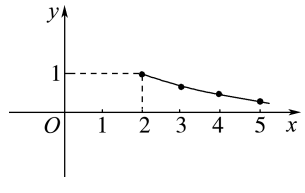
函数图象由四个点 $(0,0)$，$(1,-1)$，$(-2,2)$，$(3,-3)$ 组成，如图所示，其值域为 $\{0,-1,2,-3\}$.



(2)列表：

x	2	3	4	5	…
y	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	…

描点并用光滑的曲线连接，得函数的图象，如图所示.

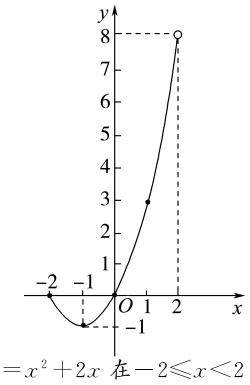


当 $x\in[2,+\infty)$ 时，图象是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 图象的一部分，观察图象可知其值域为 $(0,1]$.

(3)列表：

x	−2	−1	0	1	2
y	0	−1	0	3	8

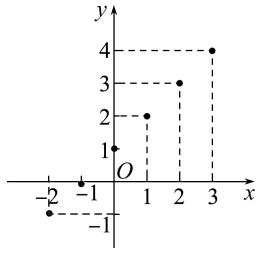
描点并用光滑的曲线连接，得函数的图象，如图所示.



图象是抛物线 $y=x^2+2x$ 在 $-2\leqslant x<2$ 时的部分，由图象可得函数的值域为 $[-1,8)$.

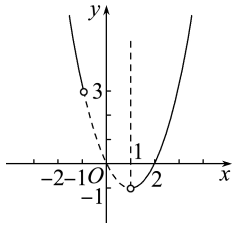
【应用迁移】

解：(1)这个函数的图象由一些点组成，这些点都在直线 $y=1+x$ 上(因为 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $y\in\mathbf{Z}$)，这些点都为整数点，如图所示的是函数图象的一部分.



由图象可得函数的值域为 $\mathbf{Z}$.

(2)函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1(x>1$ 或 $x<-1)$ 的图象是抛物线 $y=x^2-2x$ 去掉 $x\in[-1,1]$ 这一段后剩余的曲线，如图所示.



由图象可得函数的值域为 $(-1,+\infty)$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

因为 $f(0)=1$，所以 $c=1$.

又因为 $f(x+1)-f(x)=2x$，

所以 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$，

整理得 $2ax+(a+b)=2x$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=1,b=-1$，所以 $f(x)=x^2-x+1$.

(2)(方法一：换元法)令 $t=\sqrt{x}+1,t\geqslant1$，则 $x=(t-1)^2$，

所以 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1(t\geqslant1)$，

所以 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

(方法二：配凑法) $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$.

因为 $\sqrt{x}+1\geqslant1$，所以 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

(3)以 $-x$ 代替 x 得 $f(-x)+2f(x)=x^2-2x$，与 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$ 联立，解得 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$.

[一题多思]

思考 1.提示：(1)函数类型确定时用待定系数法；(2)已知 $f(g(x))$ 的解析式时用配凑法或换元法；(3) $f(x)$ 与 $f(-x)$ 或 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 并存时用方程组法.

思考 2.提示：应用换元法求函数解析式时，务必保证函数在换元前后的等价性.

【应用迁移】

1.B **解析**：设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$，则 $\begin{cases}3k+b=7,\\5k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-4,\\b=19,\end{cases}$ 所以 $f(x)=-4x+19$，

所以 $f(2)=-8+19=11$.故选 B.

2.B **解析**：令 $\frac{x}{3}-1=t$，则 $x=3(t+1)$，所以 $f(t)=2\times3(t+1)-5=6t+1$，所以 $f(x)=6x+1$.故选 B.

3.解：因为 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，①

将 x 用 $\frac{1}{x}$ 替换，得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$.②

由①②解得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$，

即 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$.

第 2 课时　分段函数及其应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)分段　(2)并

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　**2.**A

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 **解**：(1)由于 $-5\in(-\infty,-2]$，$1\in(-2,2)$，

所以 $f(-5)=-5+1=-4$，

$f(1)=3\times1+5=8$.

又 $8\in[2,+\infty)$，

所以 $f(f(1))=f(8)=2\times8-1=15$.

(2)当 $a\leqslant-2$ 时，$f(a)=a+1=3$，

解得 $a=2>-2$，不符合题意，舍去；

当 $-2<a<2$ 时，$f(a)=3a+5=3$，

解得 $a=-\frac{2}{3}\in(-2,2)$，符合题意；

当 $a\geqslant2$ 时，$f(a)=2a-1=3$，

解得 $a=2\in[2,+\infty)$，符合题意.

综上可得，当 $f(a)=3$ 时，实数 a 的值为 $-\frac{2}{3}$ 或 2.

[一题多思]

思考 1.提示：因为 $a^2+2\geqslant2$，

所以 $f(a^2+2)=2(a^2+2)-1=2a^2+3$，

所以不等式 $f(a^2+2)\geqslant a+4$ 可化为 $2a^2-a-1\geqslant0$，

解得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

思考 2.提示：当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $x+1>2x$，即 $x<1$，所以 $x\leqslant -2$；

当 $-2<x<2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $3x+5>2x$，即 $x>-5$，所以 $-2<x<2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $2x-1>2x$，则 $x\in\varnothing$.

综上可得，x 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

【应用迁移】

1.C　解析：因为函数 $f(x)=\begin{cases}4x^2,x<1,\\ x+a,x\geqslant 1,\end{cases}$ 所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$，因此 $f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=f(2)=2+a=3$，所以 $a=1$.故选 C.

2.4　解析：因为 $-\sqrt{2}<0$，所以 $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2=2$，$f(f(-\sqrt{2}))=f(2)=2\times 2=4$.

任务 2

【探究活动】

例 2　解：(1)令 $-x^2+2=x$，得 $x=-2$ 或 $x=1$.

在同一个平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象如图 1 所示.

由图 1 中函数取值的情况，结合函数 $\varphi(x)$ 的定义，可得函数 $\varphi(x)$ 的图象如图 2 所示.

结合图 2，得 $\varphi(x)=\begin{cases}-x^2+2,x\leqslant -2,\\ x,-2<x<1,\\ -x^2+2,x\geqslant 1.\end{cases}$

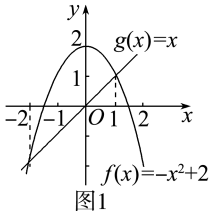


图1

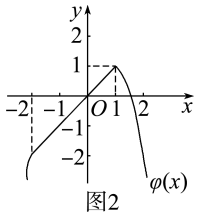


图2

(2)由图 2 知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\varphi(1)=1$，

所以 $\varphi(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]$.

【应用迁移】

1.C　2.$(-\infty,2]$

任务 3

【探究活动】

例 3　解：设用水量为 x t，

当 $0\leqslant x\leqslant 144$ 时，水费 $f(x)=3.5x$；

当 $144<x\leqslant 204$ 时，水费 $f(x)=144\times 3.5+7(x-144)=7x-504$；

当 $x>204$ 时，水费 $f(x)=144\times 3.5+7\times(204-144)+9(x-204)=9x-912$.

故水费 $f(x)=\begin{cases}3.5x,0\leqslant x\leqslant 144,\\ 7x-504,144<x\leqslant 204,\\ 9x-912,x>204.\end{cases}$

令 $3.5x=756$，解得 $x=216$，不符合题意；

令 $7x-504=756$，解得 $x=180$，$180\in(144,204]$，

所以一年用水 180 t.

【应用迁移】

解：(1)$L(x)=16\omega(x)-2x-x$

$=\begin{cases}8x^2+48-3x,0\leqslant x\leqslant 2,\\ 96-\frac{48}{1+x}-3x,2<x\leqslant 5.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$L(x)=8x^2-3x+48$，图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{16}$.

所以 $L(x)_{\max}=L(2)=74$.

当 $2<x\leqslant 5$ 时，$L(x)=99-\left[\frac{48}{x+1}+3(x+1)\right]\leqslant 99-2\sqrt{\frac{48}{x+1}\times 3(x+1)}=75$.

当且仅当 $\frac{48}{x+1}=3(x+1)$，即 $x=3$ 时，等号成立.

因为 $75>74$，所以当投入的生产成本为 300 元时，由这条生产线获得的利润最大，最大利润是 7 500 元.

3.2　函数的基本性质

3.2.1　单调性与最大(小)值

第 1 课时　函数的单调性

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\forall x_1,x_2\in I$　递增　增函数　递减　减函数

知识点二

区间 I　单调区间

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　2.BD

任务型课堂

任务 1

1.D　2.A

3.D　解析：因为函数 $f(x)=\frac{|x-1|}{3}+1=\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2}{3},x>1,\\ -\frac{x}{3}+\frac{4}{3},x\leqslant 1,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1]$.故选 D.

任务 2

【探究活动】

例 1　证明：$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}$

$=\frac{x_2(x_1^2+1)-x_1(x_2^2+1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\frac{x_1x_2(x_1-x_2)+(x_2-x_1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$

$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$.

因为 $x_1x_2<1$，$x_1-x_2<0$，$x_2^2+1>0$，$x_1^2+1>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，

所以 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增.

【应用迁移】

证明：$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2-4}-\dfrac{1}{x_2^2-4}$

$=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}$.

因为 $2<x_1<x_2$，

所以 $x_2-x_1>0$，$x_1^2>4$，$x_2^2>4$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$在区间$(2,+\infty)$上单调递减.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **解析**：由题意知，$1-m<m$，解得 $m>\dfrac{1}{2}$.所以实数 m 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)$(-\infty,-3]$ **解析**：因为函数 $f(x)$在区间$(-\infty,4]$上单调递减，所以函数 $f(x)$图象的对称轴直线 $x=1-a\geqslant 4$，所以 $a\leqslant -3$.

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-3]$.

[一题多思]

思考 1.提示：当两个自变量在函数的同一个单调区间上时，比较两个函数值的大小可以转化为比较两个自变量的大小.

思考 2.提示：会.由题意知，$\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\-2\leqslant m\leqslant 2,\\1-m<m,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{2}<m\leqslant 2$.故此时实数 m 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},2\right]$.

思考 3.提示：会.因为函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=1-a$，$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,4]$，所以 $1-a=4$，所以 $a=-3$.所以实数 a 的值为 -3.

【应用迁移】

1.ACD

2.D **解析**：函数 $f(x)=2x^2-kx+1$ 的图象为开口向上的抛物线，对称轴为直线 $x=\dfrac{k}{4}$.因为该函数在$[2,4]$上单调，因此，需满足 $\dfrac{k}{4}\leqslant 2$ 或 $\dfrac{k}{4}\geqslant 4$，解得 $k\leqslant 8$ 或 $k\geqslant 16$.故选 D.

第 2 课时　函数的最大(小)值

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\leqslant$　$\geqslant$　$f(x_0)=M$　纵坐标　纵坐标

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×　2.D

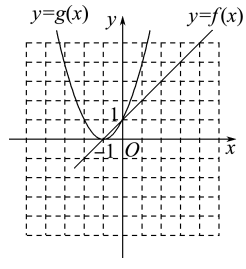
任务型课堂

任务 1

1.C

2.**解**：(1)因为 $f(x+1)=x+2$，所以 $f(x+1)=(x+1)+1$，所以 $f(x)=x+1$.

(2)在同一平面直角坐标系下，画出两函数的图象，如图所示.



由图可知，两函数图象的交点坐标分别为$(-1,0)$，$(0,1)$.

又 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，所以 $M(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x\leqslant -1,\\x+1,-1<x<0,\\(x+1)^2,x\geqslant 0,\end{cases}$

且 $M(x)_{\min}=M(-1)=0$.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)-1　3　**解析**：因为函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$x\in[0,3]$，

所以当 $x=1$ 时，函数取得最小值 -1，

当 $x=3$ 时，函数取得最大值 3.

(2)**解**：$\forall x_1,x_2\in[3,5]$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1-1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2-1}{x_2+1}=\dfrac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant 5$，

所以 $x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$在$[3,5]$上单调递增.

所以 $f(x)$的最小值为 $f(3)=\dfrac{2\times 3-1}{3+1}=\dfrac{5}{4}$，最大值为 $f(5)=\dfrac{2\times 5-1}{5+1}=\dfrac{3}{2}$.

[一题多思]

思考 1.提示：函数的最小值不变，没有最大值.

思考 2.提示：先利用定义证明函数的单调性，再利用单调性求最值.

思考 3.提示：$\forall x_1,x_2\in[2,4]$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1+1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2+1}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $2\leqslant x_1<x_2\leqslant 4$，

所以 $x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$在$[2,4]$上单调递增.

所以 $f(x)$的最小值为 $f(2)=\dfrac{2\times 2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$，最大值为 $f(4)=\dfrac{2\times 4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$.

【应用迁移】

(1)证明:对于任意 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}=(x_1-x_2)\cdot\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$.

因为 $x_2>x_1>1$,所以 $x_1-x_2<0$.

又因为 $x_1x_2>1$,所以 $x_1x_2-1>0$.

故 $(x_1-x_2)\cdot\frac{(x_1x_2-1)}{x_1x_2}<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2)解:由(1)可知,$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增,

所以当 $x\in[2,4]$ 时,$f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(4)$.

又因为 $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,$f(4)=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$,

所以 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上的最大值为 $\frac{17}{4}$,最小值为 $\frac{5}{2}$.

任务 3

【探究活动】

例 2　解:(1)当 $0<x\leqslant20$ 时,

$y=(33x-x^2)-x-100=-x^2+32x-100$;

当 $x>20$ 时,$y=260-100-x=160-x$.

故 $y=\begin{cases}-x^2+32x-100,0<x\leqslant20,\\160-x,x>20\end{cases}(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $0<x\leqslant20$ 时,$y=-x^2+32x-100=-(x-16)^2+156$,当 $x=16$ 时,$y_{max}=156$;

当 $x>20$ 时,$160-x<140$.

故 $x=16$ 时所得年利润最大,最大年利润为 156 万元.

即当该工厂年产量为 16 件时,所得最大年利润 156 万元.

【应用迁移】

解:(1)因为 $AB=x$ m,所以 $BC=(50-2x)$m.

由题意得,$x(50-2x)=300$,

解得 $x_1=15$,$x_2=10$.

因为 $\begin{cases}0<x<25,\\0<50-2x\leqslant25,\end{cases}$ 所以 $12.5\leqslant x<25$,所以 $x=15$.

所以,AB 的长为 15 m 时,矩形花园的面积为 300 m^2.

(2)由题意得,$S=x(50-2x)=-2x^2+50x=-2(x-12.5)^2+312.5$,$12.5\leqslant x<25$,

所以当 $x=12.5$ 时,S 取得最大值,最大值为 312.5.

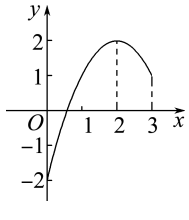
微专题培优(三)　二次函数的最值问题

类型 1

例 1　解:函数 $y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$,

其图象的对称轴是 $x=2$,顶点坐标为(2,2),且开口向下,

其在 $[0,3]$ 上的大体图象如图所示.



故函数的最大值为 $f(2)=2$,最小值为 $f(0)=-2$.

【对点训练】

解:函数 $f(x)=(x-1)^2+2$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=1$.

(1)当 $x\in[-2,0]$ 时,$f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)_{max}=f(-2)=11$,$f(x)_{min}=f(0)=3$.

(2)当 $x\in[-2,3]$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递减,在 $(1,3]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{max}=f(-2)=11$,$f(x)_{min}=f(1)=2$.

类型 2

例 2　解:函数 $f(x)=x^2-2ax+2$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=a$.

①当 $a\leqslant-1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增,

$f(x)_{min}=f(-1)=1+2a+2=2a+3$.

②当 $-1<a\leqslant1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上先减后增,

$f(x)_{min}=f(a)=a^2-2a^2+2=-a^2+2$.

③当 $a>1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减,

$f(x)_{min}=f(1)=1-2a+2=3-2a$.

综上所述,当 $a\leqslant-1$ 时,$f(x)_{min}=2a+3$;

当 $-1<a\leqslant1$ 时,$f(x)_{min}=-a^2+2$;

当 $a>1$ 时,$f(x)_{min}=3-2a$.

【对点训练】

解:因为 $f(x)=x^2-ax+1$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

①若 $\frac{a}{2}>1$,即 $a>2$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{max}=f(0)=1$.

②若 $\frac{a}{2}<0$,即 $a<0$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{max}=f(1)=2-a$.

③若 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$,即 $0\leqslant a\leqslant2$.

当 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $0\leqslant a\leqslant1$ 时,$f(x)_{max}=f(1)=2-a$,

当 $\frac{1}{2}<\frac{a}{2}\leqslant1$,即 $1<a\leqslant2$ 时,$f(x)_{max}=f(0)=1$.

综上所述,函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 1 或 $2-a$.

类型 3

例 3　解:函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=1$.

①当 $t>1$ 时,$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{min}=f(t)=t^2-2t+3$;

②当 $t\leqslant1\leqslant t+1$,即 $0\leqslant t\leqslant1$ 时,

$f(x)_{min}=f(1)=1-2+3=2$;

③当 $t+1<1$,即 $t<0$ 时,$f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上单调

递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)+3=t^2+2$.

综上所述，当 $t>1$ 时，$f(x)_{\min}=t^2-2t+3$；

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\min}=2$；

当 $t<0$ 时，$f(x)_{\min}=t^2+2$.

【对点训练】

解：函数 $f(x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=4$.

①当 $t+1<4$，即 $t<3$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，

则 $h(t)=f(t+1)=-(t+1)^2+8(t+1)=-t^2+6t+7$.

②当 $t\leqslant 4\leqslant t+1$，即 $3\leqslant t\leqslant 4$ 时，$h(t)=f(4)=16$.

③当 $t>4$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递减，

则 $h(t)=f(t)=-t^2+8t$.

综上所述，$h(t)=\begin{cases}-t^2+6t+7,t<3,\\16,3\leqslant t\leqslant 4,\\-t^2+8t,t>4.\end{cases}$

类型 4

例 4 **解**：因为 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-ax+2=-\frac{1}{2}[x-(3-a)]^2+\frac{(3-a)^2}{2}+2$，

所以 $x=3-a$ 为其图象的对称轴.

①当 $3-a<0$，即 $a>3$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{a}\right]$ 上单调递减，

$M(a)=f(0)=2$；

②当 $0\leqslant 3-a\leqslant\frac{2}{a}$，即 $0<a\leqslant 1$ 或 $2\leqslant a\leqslant 3$ 时，$M(a)=f(3-a)=\frac{(3-a)^2}{2}+2$；

③当 $3-a>\frac{2}{a}$，即 $1<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{a}\right]$ 上单调递增，$M(a)=f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{6a-2}{a^2}$.

综上所述，$M(a)=\begin{cases}2,a>3,\\\frac{(3-a)^2}{2}+2,0<a\leqslant 1\text{ 或 }2\leqslant a\leqslant 3,\\\frac{6a-2}{a^2},1<a<2.\end{cases}$

【对点训练】

解：$f(x)=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+1-\frac{a^2}{8}$ 的图象关于直线 $x=\frac{a}{4}$ 对称.

当 $-1<a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,a]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(-1)$，不合题意.

当 $a>0$ 时，$\frac{a}{4}\in[-1,a]$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,\frac{a}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left[\frac{a}{4},a\right]$ 上单调递增，要使 $f(a)$ 为最大值，则 $f(a)\geqslant f(-1)$，

即 $2a^2-a^2+1\geqslant 2+a+1$，

解得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$（舍）.

所以实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

3.2.2 奇偶性

第 1 课时 函数的奇偶性

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$f(x)$ $-f(x)$ y 轴 原点

知识点二

(1)奇 偶 (3)奇

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)√ **2**.C

任务型课堂

任务 1

1.C

2.C **解析**：对于 A，定义域为 $(-1,1]$，故选项 A 不符合题意；

对于 B，定义域为 $[0,+\infty)$，故选项 B 不符合题意；

对于 C，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=2(-x)^2-3=2x^2-3=f(x)$，是偶函数，故选项 C 符合题意；

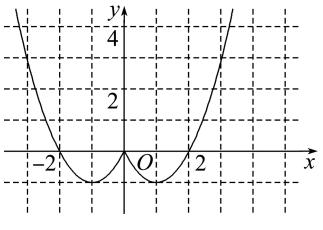
对于 D，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=-x=-f(x)$，是奇函数，故选项 D 不符合题意，故选 C.

3.ABD

任务 2

【探究活动】

例 1 **解**：(1)由题意补全函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.

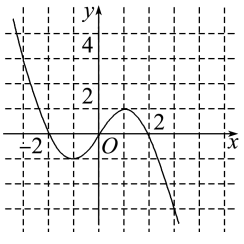


(2)由图可知，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

(3)由图可知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值集合为 $\{x\mid -2<x<2,\text{且 }x\neq 0\}$.

[一题多思]

(1)**提示**：函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.



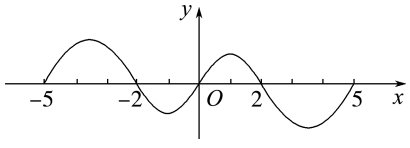
(2)**提示**：由图可知，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$.

(3)**提示**：由图可知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值集合为 $\{x\mid -2<x<0,\text{或 }x>2\}$.

【应用迁移】

解：(1)因为函数 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的图象关于原点对称.

由 $y=f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的图象，可知它在 $[-5,0]$ 上的图象如图所示.



(2)由图象可知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围为 $(-2,0)\cup(2,5)$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)B **解析**：$f(1)=1^2-2=-1$，又 $f(x)$ 在 **R** 上是奇函数，故 $f(-1)=-f(1)=1$.故选 B.

(2)D **解析**：因为函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数，

所以 $-b+2b-2=0$ 且 $f(-x)=x^2-ax+1=x^2+ax+1=f(x)$，则 $\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2+1$，则 $f\left(\frac{b}{2}\right)=f(1)=1^2+1=2$.故选 D.

(3)A **解析**：(方法一)根据题意知，函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$ 为奇函数，则有 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}+\frac{(-x)^2-(a+1)x+a}{-x}=0$，整理可得 $(a+1)x=0$，则有 $a=-1$.

(方法二)因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)$，即 $2a+2=0$，解得 $a=-1$.经检验，此时，$f(x)$ 是奇函数.所以 $a=-1$.

【应用迁移】

1.C **解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(1)=3-a$，所以 $3-a=2$，得 $a=1$.故当 $x>0$ 时，$f(x)=3x-\frac{1}{x}$，则 $f(-2)=-f(2)=-\frac{11}{2}$.故选 C.

2.D

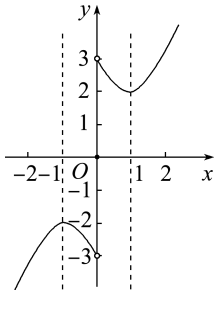
第 2 课时　函数的奇偶性的应用

任务型课堂

任务 1

1.A　**2**.B

3.**解**：(方法一：图象法)$f(x)$ 的定义域为 **R**，画出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.



由图知函数 $f(x)$ 是奇函数.

(方法二：定义法)$f(x)$ 的定义域为 **R**.

①当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $f(-x)=-(-x)^2-2(-x)-3=-(x^2-2x+3)=-f(x)$；

②当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3=-(-x^2-2x-3)=-f(x)$；

③当 $x=0$ 时，$-x=0$，$f(-x)=f(x)=f(0)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$.

由①②③可知，当 $x\in$ **R** 时，都有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)$2x^2+4x+3$ **解析**：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=2(-x)^2-4(-x)+3=2x^2+4x+3$.

由于 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，故 $f(x)=f(-x)$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2+4x+3$.

(2)**解**：因为 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

又 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，①

用 $-x$ 代替 x，

得 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

所以 $f(x)-g(x)=\frac{1}{-x-1}$.②

联立①②，解得 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

[一题多思]

思考 1.提示：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=2(-x)^2-4(-x)+3=2x^2+4x+3$.

由于 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)=-f(-x)$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=-2x^2-4x-3$.

又因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

故 $f(x)=\begin{cases}2x^2-4x+3,x>0,\\0,x=0,\\-2x^2-4x-3,x<0.\end{cases}$

思考 2.提示：因为 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

又 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，①

用 $-x$ 代替上式中的 x，得 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

即 $f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}$.②

联立①②，解得 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

【应用迁移】

1.$f(x)=x+2$

2.C **解析**：因为函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^3-3x+1$.

当 $x<0$ 时，则 $-x>0$，所以 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^3-3(-x)+1]=x^3-3x-1$.故选 C.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)$(3,+\infty)$ **解析**：由题意可知，函数 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数，所以 $a>3$.

(2)$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$ **解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，因此 $f(1-m)<f(m)$，等价于 $f(|1-m|)<f(|m|)$，所以 $\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\ -2\leqslant m\leqslant 2,\\ |1-m|>|m|,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$.

【应用迁移】

1.A **解析**：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(-\sqrt{7})=f(\sqrt{7})$，$f(-3)=f(3)$.

由于 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$\pi>3>\sqrt{7}$，

因此 $f(\pi)>f(-3)>f(-\sqrt{7})$.故选 A.

2.$[0,1)$

3.3 幂函数

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$y=x^{\alpha}$ x α

知识点二

2.$[0,+\infty)$ $[0,+\infty)$ 奇 奇 非奇非偶 增 减 增 增 减 减

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)× (4)× **2.**16

任务型课堂

任务 1

1.AC

2.D **解析**：由题意可知 $m^3=1$，解得 $m=1$，故 $f(x)=x^2$，故 $f(m+1)=f(2)=4$.故选 D.

3.D

任务 2

【探究活动】

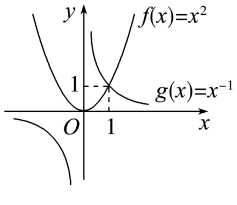
例 1 **解**：设 $f(x)=x^{\alpha}$，$g(x)=x^{\beta}$.

因为 $(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，$(-2)^{\beta}=-\frac{1}{2}$，

所以 $\alpha=2$，$\beta=-1$.

所以 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^{-1}$.

分别作出它们的图象，如图所示.



由图象知，

(1)当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)$.

(2)当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)$.

(3)当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<g(x)$.

【应用迁移】

1.D **2.**C

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)B **解析**：因为幂函数 $f(x)=(m^2+5m-5)\cdot x^{m^2-3m}(m\in\mathbf{Z})$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}m^2+5m-5=1,\\ m^2-3m<0,\end{cases}$ 且 m^2-3m 为偶数，解得 $m=1$.

当 $m=1$ 时，$m^2-3m=-2$ 满足条件.

(2)D **解析**：幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，值域为 $[0,+\infty)$，

由 $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$，得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，

又 $(-2)^3=-8<0$，所以 $c<b<a$.故选 D.

(3)$(3,5]$ **解析**：$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$，易知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.又 $f(10-2a)<f(a+1)$，所以 $\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\ 10-2a\geqslant 0,\\ a+1>10-2a,\end{cases}$ 解得 $3<a\leqslant 5$.

[一题多思]

思考 1.提示：因为幂函数 $f(x)=x^{m^2-m-3}(m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\geqslant 2)$ 为奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $m^2-m-3<0$，解得 $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

又 $m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\geqslant 2$，所以 $m=2$.

当 $m=2$ 时，$f(x)=x^{-1}$，为奇函数，故 $m=2$.

思考 2.提示：因为 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减.又因为 $-2\,024>-2\,025$，所以 $f(-2\,025)>f(-2\,024)$.

【应用迁移】

1.B

2.C **解析**：由幂函数的定义可知 $m^2-3=1$，解得 $m=\pm 2$.

由幂函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，可得 $m=-2$，则 $f(x)=x^{-2}$，所以 $f(2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$.故选 C.

3.4 函数的应用(一)

问题式预习

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ **2.**C **3.**$y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant 2,\\ 160,2<t\leqslant 4\end{cases}$

任务型课堂

任务 1

1.D　**2.**D　**3.**860

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：(1)根据题意，得 $y=90-3(x-50)$，

即 $y=-3x+240(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(2)$w=(x-40)(-3x+240)=-3x^2+360x-9\ 600(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(3)因为 $w=-3x^2+360x-9\ 600=-3(x-60)^2+1\ 200$，所以当 $x<60$ 时，w 随 x 的增大而增大.

又 $50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N}$，

所以当 $x=55$ 时，w 有最大值，最大值为 1 125.

所以当每箱苹果的售价为 55 元时，该批发商可以获得最大日利润，且最大日利润为 1 125 元.

【应用迁移】

10

任务 3

【探究活动】

例 2　D　**解析**：设男职工出生于 x 年 y 月，$1965\leqslant x\leqslant 1976,1\leqslant y\leqslant 12,x,y\in\mathbf{N}^*$.

设退休延迟月数为 z，

当 $1\leqslant y\leqslant 4$ 时，$z=3(x-1\ 965)+1$；

当 $5\leqslant y\leqslant 8$ 时，$z=3(x-1\ 965)+2$；

当 $9\leqslant y\leqslant 12$ 时，$z=3(x-1\ 965)+3$.

所以 1972 年 6 月出生的男职工退休延迟的时间为 $z=3(1\ 972-1\ 965)+2=23$(月).

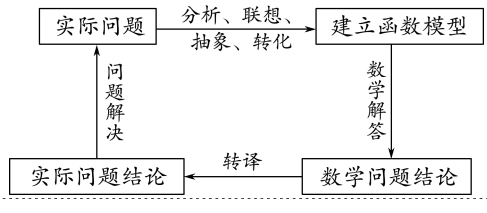
所以 1972 年 6 月出生的男职工退休年龄为 61 岁 11 个月.

故选 D.

[一题多思]

思考 1.提示：审题、建模、求解模型、还原(回答实际问题).

思考 2.提示：



【应用迁移】

20　**解析**：设用水量为 x m^3，缴纳水费为 y 元.由题意可知

$$y=\begin{cases}3x,x\leqslant 12,\\36+6(x-12),12<x\leqslant 18,\\72+9(x-18),x>18.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 12$ 时，最大值为 36；当 $12<x\leqslant 18$ 时，最大值为 72，所以 $72+9(x-18)=90$，解得 $x=20$.

第四章　指数函数与对数函数

4.1　指数

4.1.1　n 次方根与分数指数幂

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)x　a　(2)$\sqrt[n]{a}$　$\pm\sqrt[n]{a}$

知识点二

(1)$\sqrt[n]{a}$　根指数　被开方数　(2)a　$-a$

知识点三

0　没有意义

知识点四

(2)a^{rs}　(3)a^rb^r

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)×　**2.**C

任务型课堂

任务 1

1.BD

2.解：(1)原式$=-2+(-2)=-4$.

(2)原式$=|\pi-4|+\pi-4=4-\pi+\pi-4=0$.

(3)原式$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$.

因为 $x\leqslant -3$，所以 $x-1<0,x+3\leqslant 0$，

所以原式$=-(x-1)+(x+3)=4$.

[一题多思]

思考 1.提示：不同.$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6=|-2|+2=2+2=4$.

思考 2.提示：$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$.

因为 $-3<x<3$，所以当 $-3<x<1$ 时，

原式$=-(x-1)-(x+3)=-2x-2$；

当 $1\leqslant x<3$ 时，原式$=x-1-(x+3)=-4$.

所以原式$=\begin{cases}-2x-2,-3<x<1,\\-4,1\leqslant x<3.\end{cases}$

任务 2

【探究活动】

例 1　CD　**解析**：因为$-\sqrt{x}=-x^{\frac{1}{2}}$，所以选项 A 错误；因为$\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{2}{6}}=-y^{\frac{1}{3}}(y<0)$，所以选项 B 错误；因为$x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq 0)$，所以选项 C 正确；因为$[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}}=(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$，所以选项 D 正确.故选 CD.

【应用迁移】

解：(1)原式$=a^{\frac{1}{3}}\cdot(-a)^{\frac{1}{6}}=-(-a)^{\frac{1}{3}}\cdot(-a)^{\frac{1}{6}}=-(-a)^{\frac{1}{2}}(a<0)$.

(2)原式$=b^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}=(-b)^{\frac{1}{9}}(b<0)$.

(3)原式$=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{-\frac{3}{5}}(x\neq 0)$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**:(1)原式$=\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}-1-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{3}}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}-1-\frac{3}{4}+8=\frac{95}{12}$.

(2)原式$=5\times(-4)\times\left(-\frac{6}{5}\right)\times a^{-\frac{2}{3}-(-1)-\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)}=24a^{0}b^{\frac{1}{6}}=24b^{\frac{1}{6}}$.

【应用迁移】

解:(1)原式$=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}-1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{3}{2}-1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=[2\times(-3)\div(-6)]x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=x^{2}y$.

(3)原式$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\div\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{a^{\frac{1}{3}}[(a^{\frac{1}{3}})^{3}-(2b^{\frac{1}{3}})^{3}]}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a$.

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质

问题式预习

【知识清单】

知识点

实数 (2)a^{rs} (3)$a^{r}b^{r}$

【概念辨析】

1.(1)√ (2)√ (3)× (4)× (5)√

2.(1)$\frac{1}{27}$ (2)①6 ②$\frac{3}{2}$ ③$\frac{1}{27}$ ④$\sqrt{3}$

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 **解**:(1)原式$=[(2^{3})^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}]^{\sqrt{3}}=(2^{3})^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}}=2^{3}\times3=24$.

(2)原式$=\left(\frac{\pi^{\sqrt{2}}}{\pi^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=(\pi^{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pi^{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$.

【应用迁移】

解:(1)原式$=x^{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}y^{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=x^{2\sqrt{3}}y^{3\sqrt{2}}$.

(2)原式$=-12x^{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}y^{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-12y^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

(3)原式$=\left(3\times\frac{1}{3}\right)^{\pi}+2^{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+1=1^{\pi}+2^{4}+1=18$.

任务 2

【探究活动】

例 2 7 **解析**:将$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方,得$x+x^{-1}+2=5$,则$x+x^{-1}=3$.将$x+x^{-1}=3$两边平方,得$x^{2}+x^{-2}+2=9$,所以$x^{2}+x^{-2}=7$.

[一题多思]

思考 1.提示:可设$m=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$,两边平方后整理得$m^{2}=x+x^{-1}+2$,代入$x+x^{-1}$的值即可求得$m^{2}=5$.

因为$m>0$,所以$m=\sqrt{5}$,即$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

思考 2.提示:将$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方,得$x+x^{-1}+2=5$,则$x+x^{-1}=3$,将$x+x^{-1}=3$两边平方,得$x^{2}+x^{-2}+2=9$,所以$x^{2}+x^{-2}=7$.因为$(x^{2}-x^{-2})^{2}=(x^{2}+x^{-2})^{2}-4=49-4=45$,所以$x^{2}-x^{-2}=\pm3\sqrt{5}$.

思考 3.提示:由$x+x^{-1}=7$两边平方后整理可得$x^{2}+x^{-2}=47$,所以$x^{3}+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^{2}+x^{-2}-1)=7\times46=322$.

【应用迁移】

解:由题意知$x_1+x_2=8$,$x_1x_2=4$.

(1)因为$x_1<x_2$,所以$x_1^{-2}-x_2^{-2}=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{(x_1x_2)^{2}}$

$=\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^{2}-4x_1x_2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{64-16}}{2}=2\sqrt{3}$.

(2)$x_1^{-\frac{1}{2}}-x_2^{-\frac{1}{2}}=\frac{x_2^{\frac{1}{2}}-x_1^{\frac{1}{2}}}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{\sqrt{8-2\times\sqrt{4}}}{2}=1$.

4.2 指数函数

4.2.1 指数函数的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$y=a^{x}$ 指数 x

知识点二

$y=ka^{x}$ 增长 衰减

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)× (4)√ **2.**8

任务型课堂

任务 1

1.B **2.**C **3.**C

[一题多思]

思考 1.提示:指数函数解析式的三个特征:

(1)底数 a 为大于 0 且不等于 1 的常数;

(2)指数位置是自变量 x;

(3)a^{x}的系数是 1.

思考 2.提示:两者虽然都是幂的形式,但不同之处在于指数函数的自变量在指数上,而幂函数的自变量在底数上.

思考 3.提示:是.函数$y=4^{2x}=16^{x}$是指数函数.

任务 2

【探究活动】

例 1 B **解析**：因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数，所以 $\frac{1}{2}a-3=1$，$a>0$，且 $a\neq1$，解得 $a=8$，所以 $f(x)=8^x$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.故选 B.

【应用迁移】

D **解析**：设指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，由指数函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$，可得 $a^{-2}=\frac{1}{4}=2^{-2}$，解得 $a=2$.所以指数函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2^x$，所以 $f(4)f(2)=2^4\times2^2=2^6=64$.故选 D.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：(1)设 2018 年患呼吸道疾病的人数为 a 万，

则 $a(1+2\%)^5=11$，即 $a\times1.02^5=11$.

所以 $a=\frac{11}{1.02^5}\approx10$.

所以 2018 年患呼吸道疾病的人数约为 10 万.

(2)经过 1 年，患呼吸道疾病的人数为 $10+10\times2\%=10(1+2\%)$；

经过 2 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)+10(1+2\%)\times2\%=10(1+2\%)^2$；

经过 3 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^2+10(1+2\%)^2\times2\%=10(1+2\%)^3$；

……

经过 x 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^x$.

故 $y=10(1+2\%)^x=10\times1.02^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

在 2026 年，$x=8$，故患呼吸道疾病的人数为 $y=10\times1.02^8=10\times1.02^5\times1.02^3\approx10\times1.1\times1.06=11.66$(万).

所以 2026 年患呼吸道疾病的人数约为 11.66 万.

【应用迁移】

1.C

2.解：由题意得 $\begin{cases}c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m}=64,\\c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m}=32,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4}.\end{cases}$ 故 c，m 的值分别为 128，$\frac{1}{4}$.

4.2.2 指数函数的图象和性质

第 1 课时 指数函数的图象和性质

问题式预习

【知识清单】

知识点

1. $y=a^x$ $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ y 轴

2.R $(0,+\infty)$ $(0,1)$ 0 1 $y>1$ $0<y<1$ $0<y<1$ $y>1$ 增 减

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)× **2.**$(-\infty,0)$

任务型课堂

任务 1

1.$\{x\mid x\neq1\}$ **2.**$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$

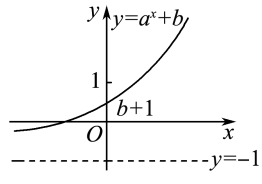
任务 2

【探究活动】

例 1 (1)C **解析**：由于 $0<m<n<1$，所以 $y=m^x$ 与 $y=n^x$ 都是减函数，故排除 A，B.作直线 $x=1$ 与两条曲线相交(图略)，交点在下的曲线是函数 $y=m^x$ 的图象.

(2)C **解析**：由函数 $f(x)=a^{x-1}+1(a>0$，且 $a\neq1)$，令 $x-1=0$，即 $x=1$，可得 $f(1)=a^0+1=2$，所以函数 $f(x)$ 的图象恒过定点(1，2).故选 C.

(3)A **解析**：因为 $a>1$，$-1<b<0$，故函数 $y=a^x+b$ 的大致图象如图所示，在第一、二、三象限.



[一题多思]

思考 1.提示：(1)图象是上升的，还是下降的；(2)底数不同对图象位置的影响.

思考 2.提示：由函数 $f(x)=2a^{x+m}-n(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 $(-1,4)$，得 $m-1=0$，$2\cdot a^{m-1}-n=4$，

解得 $m=1$，$n=-2$.

思考 3.提示：B

【应用迁移】

1.D **解析**：因为幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)x^m$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m>0,\end{cases}$ 解得 $m=3$，所以 $g(x)=a^{x-3}+2(a>1)$，令 $x-3=0$ 得 $x=3$，所以 $g(3)=a^0+2=3$，所以 $g(x)=a^{x-m}+2(a>1)$ 的图象过定点 $(3,3)$.故选 D.

2.B **3.**AC

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：(1)$1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$ 可看作函数 $y=1.5^x$ 的两个函数值.由于底数 $1.5>1$，所以函数 $y=1.5^x$ 在 **R** 上是增函数.因为 $2.5<3.2$，所以 $1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$.

(2)$0.6^{-1.2}$，$0.6^{-1.5}$ 可看作函数 $y=0.6^x$ 的两个函数值.因为函数 $y=0.6^x$ 在 **R** 上是减函数，且 $-1.2>-1.5$，所以 $0.6^{-1.2}<0.6^{-1.5}$.

(3)由指数函数的性质得

$1.7^{0.2}>1.7^0=1$，$0.9^{2.1}<0.9^0=1$，

所以 $1.7^{0.2}>0.9^{2.1}$.

(4)当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是增函数，此时 $a^{1.1}>a^{0.3}$；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是减函数，此时 $a^{1.1}<a^{0.3}$.

【应用迁移】

解：(1)因为 $1.5^{0.3}>1.5^0=1$，$0.4^{3.1}<0.4^0=1$，

所以 $1.5^{0.3}>0.4^{3.1}$.

(2)因为 $0<\frac{5}{7}<1$，所以函数 $y=\left(\frac{5}{7}\right)^x$ 在其定义域 **R** 上单调递减.又因为 $-1.8>-2.5$，所以 $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1.8}<\left(\frac{5}{7}\right)^{-2.5}$.

(3)因为 $0<0.2<0.3<1$，所以指数函数 $y=0.2^x$ 与 $y=0.3^x$ 在定义域 **R** 上均是减函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $y=0.2^x$ 的图象在函数 $y=0.3^x$ 的图象的下方，所以 $0.2^{0.2}<0.3^{0.2}$.

又根据指数函数 $y=0.2^x$ 在 **R** 上是减函数，可得 $0.2^{0.3}<0.2^{0.2}$，所以 $0.2^{0.3}<0.3^{0.2}$.

任务 4

【探究活动】

例 3 **解**：①当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 **R** 上是减函数.

所以 $x^2-3x+1>x+6$，所以 $x^2-4x-5>0$，

解得 $x<-1$ 或 $x>5$.

②当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 **R** 上是增函数.

所以 $x^2-3x+1<x+6$，所以 $x^2-4x-5<0$，

解得 $-1<x<5$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$；当 $a>1$ 时，解集为 $\{x\mid -1<x<5\}$.

【应用迁移】

解：(1)因为 $3^{x-1}>9^x$，所以 $3^{x-1}>3^{2x}$.

又 $y=3^x$ 在定义域 **R** 上是增函数，

所以 $x-1>2x$，所以 $x<-1$.

即 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

(2)因为 $0<0.2<1$，所以指数函数 $f(x)=0.2^x$ 在 **R** 上是减函数.

又 $25=0.2^{-2}$，所以 $0.2^x<25$，即 $0.2^x<0.2^{-2}$，

所以 $x>-2$，即 x 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

(3)当 $a>1$ 时，因为 $a^{-5x}>a^{x+7}$，所以 $-5x>x+7$，

解得 $x<-\frac{7}{6}$；

当 $0<a<1$ 时，因为 $a^{-5x}>a^{x+7}$，所以 $-5x<x+7$，解得 $x>-\frac{7}{6}$.

综上所述，当 $a>1$ 时，x 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)$；当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围是 $\left(-\frac{7}{6},+\infty\right)$.

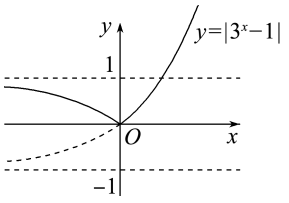
第 2 课时　指数函数的图象和性质的应用

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 $\{0\}\cup[1,+\infty)$ **解析**：函数 $y=|3^x-1|$ 的图象是由函数 $y=3^x$ 的图象向下平移一个单位长度后，再把位于 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方得到的，函数图象如图所示.



当 $k=0$ 或 $k\geqslant 1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象有唯一的交点，即方程 $|3^x-1|=k$ 仅有一解.

【应用迁移】

1. $(0,+\infty)$　**2.** $(-\infty,-1]$

任务 2

【探究活动】

例 2 **解**：令 $u=x^2-2x$，则原函数变为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$，$u\in[-1,+\infty)$，

所以 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$，

所以原函数的值域为 $(0,3]$.

[一题多思]

思考 1.提示：由两个函数 $y=a^u$，$u=f(x)$ 复合而成.

思考 2.提示：一是底数；二是 $f(x)$ 的单调性.

思考 3.提示：令 $u=3^x$，则 $y=u^2-2u+3$，$u>0$.

$y=u^2-2u+3=(u-1)^2+2$，$u>0$.

当 $x<0$ 时，$u=3^x$ 单调递增，且 $0<u<1$.

又 $y=u^2-2u+3$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

当 $x\geqslant 0$ 时，$u=3^x$ 单调递增，且 $u\geqslant 1$.

又 $y=u^2-2u+3$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

综上，函数 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

【应用迁移】

1.解：(1)令 $u(x)=2x-x^2$，则 $u(x)=-(x-1)^2+1$，定义域为 **R**.

故 $u(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 为减函数，根据复合函数“同增异减”原则得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

故函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的单调递增区间为[1,+∞),单调递减区间为(−∞,1].

(2)函数的定义域为 **R**,令 $t=2^x$,$x\in\mathbf{R}$,则 $t\in(0,+\infty)$.

$y=(2^x)^2-2\times2^x+5=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$,$t\in(0,+\infty)$.

当 $t\geqslant1$ 时,$2^x\geqslant1$,$x\geqslant0$;当 $0<t\leqslant1$ 时,$0<2^x\leqslant1$,$x\leqslant0$.

因为 $y=(t-1)^2+4$ 在[1,+∞)上单调递增,$t=2^x$ 在[0,+∞)上单调递增,

所以 $y=4^x-2\times2^x+5$ 的单调递增区间为[0,+∞).

同理可得单调递减区间为(−∞,0].

2.解:(1)因为 $f(x)$ 是指数函数,且在其定义域内单调递增,所以 $3a^2-10a+4=1$,且 $a>1$,

解得 $a=3$ 或 $a=\frac{1}{3}$(舍),所以 $f(x)=3^x$.

(2)由(1)可得 $g(x)=3^{2x}-4\cdot3^x-3=(3^x)^2-4\cdot3^x-3$,因为 $x\in[0,2]$,

所以 $3^x\in[1,9]$,令 $t=3^x$,$t\in[1,9]$,

所以 $y=t^2-4t-3$,$t\in[1,9]$,

所以 $y_{\min}=2^2-4\times2-3=-7$,$y_{\max}=9^2-4\times9-3=42$.

所以 $g(x)$ 的值域为[−7,42].

任务 3

【探究活动】

例 3 **解**:因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,

所以 $f(0)=0$,即 $k-1=0$,所以 $k=1$.

当 $k=1$ 时,$f(x)=a^x-a^{-x}$,$f(-x)=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$,

故 $k=1$ 符合题意.

【应用迁移】

D

任务 4

【探究活动】

例 4 **解**:(1)由题意可知,$f(x)=\frac{4^x-1}{2^x}=2^x-2^{-x}$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 **R**,且 $f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)$f(x)$ 在(0,+∞)上单调递增.

证明如下:任取 x_1,$x_2\in(0,+\infty)$,设 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}-2^{-x_1}-2^{x_2}+2^{-x_2}=2^{x_1}-2^{x_2}+\left(\frac{1}{2^{x_2}}-\frac{1}{2^{x_1}}\right)=2^{x_1}-2^{x_2}+\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)=(2^{x_1}-2^{x_2})\cdot\frac{2^{x_1+x_2}+1}{2^{x_1+x_2}}$.

因为 $x_1<x_2$,所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$,所以 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$.

又因为 x_1,$x_2\in(0,+\infty)$,所以 $2^{x_1+x_2}>1$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在(0,+∞)上单调递增.

(3)由(1)(2)知,$f(x)$ 是在(0,+∞)上单调递增的奇函数,$f(0)=0$,

所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,

所以 $f(2x-a)+f(-x^2+ax-a)>0$,可以转化为 $f(2x-a)>f(x^2-ax+a)$,

可化为 $2x-a>x^2-ax+a$,即 $(x-2)(x-a)<0$.

①当 $a=2$ 时,不等式为 $(x-2)^2<0$,这时解集为∅;

②当 $a>2$ 时,解不等式得到 $2<x<a$;

③当 $a<2$ 时,解不等式得到 $a<x<2$.

综上,当 $a=2$ 时,解集为∅;当 $a>2$ 时,解集为 $\{x\mid2<x<a\}$;当 $a<2$ 时,解集为 $\{x\mid a<x<2\}$.

【应用迁移】

解:(1)易知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,

因为 $f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{(a^{-x}-1)a^x}{(a^{-x}+1)a^x}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)因为函数 $f(x)=\frac{a^x+1-2}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$,设 x_1,$x_2\in\mathbf{R}$,$x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(1-\frac{2}{a^{x_1}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{a^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{a^{x_2}+1}-\frac{2}{a^{x_1}+1}=\frac{2(a^{x_1}-a^{x_2})}{(a^{x_1}+1)(a^{x_2}+1)}$.

当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 在 **R** 上单调递增,由 $x_1<x_2$,得 $a^{x_1}<a^{x_2}$,所以 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$.

又 $a^{x_1}+1>0$,$a^{x_2}+1>0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,即此时 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增;

同理,当 $0<a<1$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$,即此时 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减.

综上,当 $a>1$ 时,函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增;

当 $0<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减.

(3)令 $a^x=t$,则 $t>0$,

结合(2)知,原函数等价于 $y=1-\frac{2}{t+1}$,

易知 $y=1-\frac{2}{t+1}$ 在区间(0,+∞)上单调递增,所以 $-1<1-\frac{2}{t+1}<1$,故 $f(x)$ 的值域为(−1,1).

4.3 对数

4.3.1 对数的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)对数 $\log_aN$ 真数 (2)10 e

知识点二

(1)负数和 0 (2)$\log_a1=0$($a>0$,且 $a\neq1$) (4)N

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)× **2.**0 1

任务型课堂

任务 1

1.D **2.** $\sqrt{10}$

3.解：(1)由已知等式，两边取自然对数得 $\ln e^a=\ln 16$，即 $a=\ln 16$.

(2)由已知等式，两边取对数得 $\log_{64}64^{-\frac{1}{3}}=\log_{64}\frac{1}{4}$，即 $\log_{64}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$.

(3)由已知等式，可得 $3^{\log_3 9}=3^2$，即 $3^2=9$.

(4)由已知等式，可得 $x^{\log_x y}=x^z$，即 $x^z=y$.

任务 2

【探究活动】

例 1　解：(1)由 $\log_x 27=\frac{3}{2}$，可得 $x^{\frac{3}{2}}=27$，

所以 $x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)由 $\log_2 x=-\frac{2}{3}$，可得 $x=2^{-\frac{2}{3}}$，

所以 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

(3)由 $x=\log_{27}\frac{1}{9}$，可得 $27^x=\frac{1}{9}$，

所以 $3^{3x}=3^{-2}$，所以 $x=-\frac{2}{3}$.

(4)由 $x=\log_{\frac{1}{2}}16$，可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$，

所以 $2^{-x}=2^4$，所以 $x=-4$.

【应用迁移】

1.解：(1)由 $\log_2 x=-\frac{1}{2}$，得 $2^{-\frac{1}{2}}=x$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由 $\log_x 25=2$，得 $x^2=25$.

因为 $x>0$，且 $x\neq 1$，所以 $x=5$.

(3)由 $\log_5 x^2=2$，得 $x^2=5^2$，所以 $x=\pm 5$.

因为 $5^2=25>0$，$(-5)^2=25>0$，

所以 $x=5$ 或 $x=-5$.

2.解：因为 $\log_{\frac{1}{2}}x=m$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^m=x$，$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

因为 $\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$，

所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}=y$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}$.

所以 $\frac{x^2}{y}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-(2m+4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$.

任务 3

【探究活动】

例 2　解：(1)设 $t=\log_3 x$，则 $\log_5 t=0$，所以 $t=1$，

即 $\log_3 x=1$，所以 $x=3$.

(2)因为 $5^{\log_5(2x-1)}=25$，所以 $2x-1=25$，解得 $x=13$.

[一题多思]

思考 1.提示：因为 $\log_3(\log_5 x)=0$，所以 $\log_5 x=3^0=1$，所以 $x=5^1=5$.

思考 2.提示：因为 $\log_5(\log_3 x)=1$，所以 $\log_3 x=5$，所以 $x=3^5=243$.

思考 3.提示：$x=7^{1-\log_7 5}=7\div 7^{\log_7 5}=7\div 5=\frac{7}{5}$.

【应用迁移】

1.AB　解析：$\lg(\lg 10)=\lg 1=0$，所以 A 正确；$e^{\ln\pi}=\pi$，满足对数的运算法则，所以 B 正确；若 $e=\ln x$，则 $x=e^e$，所以 C 不正确；$\ln(\lg 1)=\ln 0$，0 没有对数，所以 D 不正确. 故选 AB.

2.解：(1)$25^{\frac{1}{2}\log_5 4}=5^{\log_5 4}=4$.

(2)$\ln e+\ln 1+e^{\ln 3}=1+0+3=4$.

4.3.2　对数的运算

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$\log_a M+\log_a N$　(2)$\log_a M-\log_a N$　(3)$n\log_a M$

知识点二

1

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)√　**2.**2

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　(1)A　**解析**：$\frac{\lg 12}{\lg 15}=\frac{\lg(3\times 4)}{\lg(3\times 5)}=\frac{\lg 3+2\lg 2}{\lg 3+\lg 5}=\frac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 3+1-\lg 2}=\frac{2a+b}{1-a+b}$.

(2)**解**：①原式$=(\lg 5)^2+(2-\lg 2)\lg 2$

$=(\lg 5)^2+(1+\lg 5)\lg 2$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg 5+\lg 2$

$=(\lg 5+\lg 2)\cdot\lg 5+\lg 2$

$=\lg 5+\lg 2=1$.

②原式$=\frac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}$

$=\frac{\left(1+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\frac{11}{5}$.

③原式$=\log_5(5\times 7)-2(\log_5 7-\log_5 3)+\log_5 7-\log_5\frac{9}{5}=\log_5 5+\log_5 7-2\log_5 7+2\log_5 3+\log_5 7-2\log_5 3+\log_5 5=2\log_5 5=2$.

【应用迁移】

1.$b+3a-1$

2.解：(1)(方法一)原式$=\frac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times\lg 2+\frac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)$

$=\frac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5$

$=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 5)$

$=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}$.

(方法二)原式$=\lg\frac{4\sqrt{2}}{7}-\lg 4+\lg 7\sqrt{5}$

$=\lg\frac{4\sqrt{2}\times 7\sqrt{5}}{7\times 4}=\lg(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5\times(2\lg 2+\lg 5)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 10+(\lg 5+\lg 2)^2=2+(\lg 10)^2=2+1=3$.

任务 2

【探究活动】

例 2 (1)A **解析**:因为$3^x=5^y=a$,所以$x\lg 3=y\lg 5=\lg a$,所以$\frac{1}{x}=\frac{\lg 3}{\lg a}$,$\frac{1}{y}=\frac{\lg 5}{\lg a}$,所以$2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\lg 3+\lg 5}{\lg a}=\frac{\lg 15}{\lg a}$,所以$\lg a^2=\lg 15$,

所以$a^2=15$.因为$a>0$,所以$a=\sqrt{15}$.故选 A.

(2)**解**:因为$18^b=5$,所以$\log_{18}5=b$.

(方法一)$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(9\times 5)}{\log_{18}\frac{18^2}{9}}$

$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}$.

(方法二)因为$\frac{\lg 9}{\lg 18}=\log_{18}9=a$,所以$\lg 9=a\lg 18$,

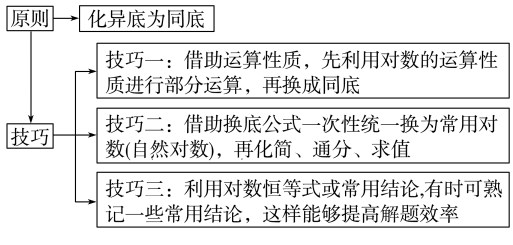
同理得$\lg 5=b\lg 18$,

所以$\log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg(9\times 5)}{\lg\frac{18^2}{9}}=\frac{\lg 9+\lg 5}{2\lg 18-\lg 9}$

$=\frac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\frac{a+b}{2-a}$.

[一题多思]

思考 1.提示:



思考 2.提示:因为$3^a=5^b=c$,所以$c>0$,所以$a=\log_3 c$,$b=\log_5 c$,

所以$\frac{1}{a}=\log_c 3$,$\frac{1}{b}=\log_c 5$,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_c 15$.

由$\log_c 15=2$,得$c^2=15$,即$c=\sqrt{15}$(负值舍去).

思考 3.提示:因为$18^b=5$,所以$\log_{18}5=b$,

所以$\log_9 15=\frac{\log_{18}15}{\log_{18}9}=\frac{\log_{18}(3\times 5)}{\log_{18}9}=\frac{\log_{18}3+\log_{18}5}{a}=\frac{\log_{18}\sqrt{9}+b}{a}=\frac{\log_{18}9^{\frac{1}{2}}+b}{a}=\frac{\frac{1}{2}\log_{18}9+b}{a}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a}=\frac{a+2b}{2a}$.

【应用迁移】

1.C **解析**:$\log_5 12=\frac{\lg 12}{\lg 5}=\frac{\lg 3+2\lg 2}{1-\lg 2}=\frac{2a+b}{1-a}$.故选 C.

2.解:(1)原式$=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 5}{\lg 3}\times\frac{\lg 16}{\lg 5}=\frac{\lg 16}{\lg 2}=\frac{4\lg 2}{\lg 2}=4$.

(2)原式$=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{\lg 9}\right)\left(\frac{\lg 3}{\lg 4}+\frac{\lg 3}{\lg 8}\right)=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)=\frac{3\lg 2}{2\lg 3}\times\frac{5\lg 3}{6\lg 2}=\frac{5}{4}$.

(3)(方法一)原式$=$

$\left(\log_2 5^3+\frac{\log_2 25}{\log_2 4}+\frac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\frac{\log_5 4}{\log_5 25}+\frac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$

$=\left(3\log_2 5+\frac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\frac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\frac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\frac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)$

$=\left(3+1+\frac{1}{3}\right)\log_2 5\times(3\log_5 2)$

$=13\log_2 5\times\frac{\log_2 2}{\log_2 5}=13$.

(方法二)原式$=\left(\frac{\lg 125}{\lg 2}+\frac{\lg 25}{\lg 4}+\frac{\lg 5}{\lg 8}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}+\frac{\lg 4}{\lg 25}+\frac{\lg 8}{\lg 125}\right)=\left(\frac{3\lg 5}{\lg 2}+\frac{2\lg 5}{2\lg 2}+\frac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}+\frac{2\lg 2}{2\lg 5}+\frac{3\lg 2}{3\lg 5}\right)$

$=\frac{13\lg 5}{3\lg 2}\times\frac{3\lg 2}{\lg 5}=13$.

任务 3

【探究活动】

例 3 C **解析**:由题意可得,$t=0.8$,$\rho=7.6$,$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}$.因为$I=I_0 e^{-\rho\mu t}$,所以$\frac{1}{2}=e^{-7.6\times 0.8\times\mu}$,即$\mu=\frac{\ln 2}{7.6\times 0.8}\approx\frac{0.693\,1}{6.08}$

≈ 0.114.所以这种射线的吸收系数约为 0.114.故选 C.

【应用迁移】

A

4.4 对数函数

4.4.1 对数函数的概念

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\log_a x$ $(0,+\infty)$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)× **2.**2

任务型课堂

任务 1

1.CD **2.**-5

任务 2

【探究活动】

例 1 **解**:(1)由$\begin{cases}x-3>0,\\x+3>0\end{cases}$得$x>3$.

所以函数$y=\log_a(x-3)+\log_a(x+3)$的定义域为$\{x\mid x>3\}$.

(2)要使函数有意义,需满足$\begin{cases}x-2>0,\\x-3\neq0,\end{cases}$

解得 $x>2$ 且 $x\neq3$.

所以函数的定义域为$(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(3)要使函数有意义,需满足$\begin{cases}16-4x>0,\\x+1>0,\\x+1\neq1,\end{cases}$

解得$-1<x<0$ 或 $0<x<4$.

所以函数的定义域为$(-1,0)\cup(0,4)$.

[一题多思]

思考 1.提示:真数大于 0,底数大于 0 且不为 1.

思考 2.提示:变化了.定义域为$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

【应用迁移】

1.B　**解析**:由题意得$\begin{cases}2-x>0,\\x+1\geqslant0,\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow-1<x<2$,所以所求函数的定义域为$(-1,2)$.故选 B.

2.$\left(1,\frac{5}{3}\right)$

任务 3

【探究活动】

例 2　C　**解析**:由于 $M_L=\lg\left(\frac{A_{\max}}{A_0}\right)$,所以 $A_{\max}=A_0 10^{M_L}$,所以 6.5 级地震的最大振幅与 4.5 级地震的最大振幅的比值为$\frac{A_0 10^{6.5}}{A_0 10^{4.5}}=10^2=100$.

【应用迁移】

解:(1)设 $v=k\cdot\log_3\frac{Q}{100}(k>0)$,因为当 $Q=900$ 时,$v=1$,

所以 $1=k\cdot\log_3\frac{900}{100}$,所以 $k=\frac{1}{2}$,

所以 v 关于 Q 的函数解析式为 $v=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$.

(2)令 $v=1.5$,则 $1.5=\frac{1}{2}\log_3\frac{Q}{100}$,解得 $Q=2\,700$,即一条鲑鱼的游速是 1.5 m/s 时,耗氧量的单位数为 2 700.

4.4.2　对数函数的图象和性质

第 1 课时　对数函数的图象和性质

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.$\log_{\frac{1}{2}}x$　x 轴

2.$(0,+\infty)$　增　减　$(1,0)$　$(-\infty,0)$　$[0,+\infty)$　$(0,+\infty)$　$(-\infty,0]$

知识点二

$y=\log_a x$　反函数　定义域　值域

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　(4)√　**2.**A

任务型课堂

任务 1

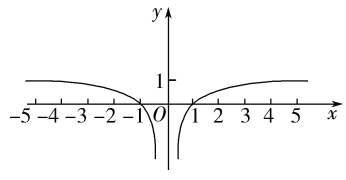
1.D　**2.**A

3.解:因为 $f(x)=\log_a|x|$,

所以 $f(-5)=\log_a 5=1$,即 $a=5$.

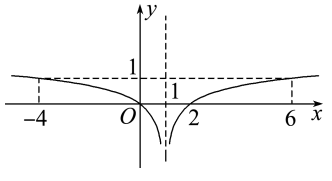
所以 $f(x)=\log_5|x|$.

所以 $f(x)$是偶函数,其图象如图所示.



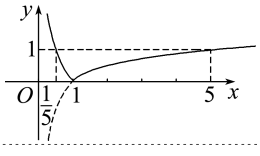
[一题多思]

思考 1.提示:因为 $f(x)=\log_5|x|$,所以 $g(x)=\log_5|x-1|$.如图,$g(x)$的图象是由 $f(x)$的图象向右平移 1 个单位长度得到的.



思考 2.提示:因为 $a=5$,所以 $h(x)=|\log_5 x|$.

$h(x)$的图象如图中实线部分所示.



任务 2

【探究活动】

例 1　**解**:(1)$\ln 0.3<\ln 2$.

(2)当 $a>1$ 时,$\log_a 3.1<\log_a 5.2$;

当 $0<a<1$ 时,$\log_a 3.1>\log_a 5.2$.

(3)$\log_3 0.2<\log_4 0.2$.

(4)$\log_3\pi>\log_\pi 3$.

【应用迁移】

1.D　**解析**:因为 $a=\log_2 e>\log_2 2=1$,$0<b=\ln 2<\ln e=1$,$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e=a$,则 a,b,c 的大小关系 $c>a>b$.故选 D.

2.B

任务 3

【探究活动】

例 2　(1)C　**解析**:函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,排除 B;当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内都是单调递增的,$y=x+a$ 在 y 轴上的截距 $a>1$,排除 A;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内单调递减,$y=x+a$ 在 y 轴上的截距 $0<a<1$,排除 D.故选 C.

(2)A　**解析**:由题意可得 $f(x)=\log_a x$.

因为函数 $g(x)$的图象过点$(-2,4)$,所以函数 $f(x)$的图

象过点(4,−2),即$-2=\log_a 4$,解得$a=\frac{1}{2}$.所以$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.所以$f(1)+f(2)=\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}2=0-1=-1$.故选A.

【应用迁移】

A

第2课时　对数函数的图象和性质的应用

任务型课堂

任务1

1.A　**2.**$\left(\frac{1}{2},1\right)$

[一题多思]

思考1.提示:(1)讨论a与1的关系,确定单调性;(2)注意真数大于0.

思考2.提示:由$f(x)=\log_a(1-a^x)$,得$f(1)=\log_a(1-a)$,则$1-a>0$,所以$0<a<1$.

原不等式化为$\log_a(1-a^x)>\log_a(1-a)$,

所以$\begin{cases}1-a^x>0,\\1-a^x<1-a,\end{cases}$即$\begin{cases}a^x<1,\\a^x>a,\end{cases}$所以$0<x<1$.

所以不等式的解集为(0,1).

3.解:原不等式化为$\log_a(x-4)>\log_a(2x-1)$.

当$a>1$时,不等式等价于$\begin{cases}x-4>0,\\2x-1>0,\\x-4>2x-1,\end{cases}$无解;

当$0<a<1$时,不等式等价于$\begin{cases}x-4>0,\\2x-1>0,\\x-4<2x-1,\end{cases}$解得$x>4$.

综上可知,当$a>1$时,解集为$\varnothing$;当$0<a<1$时,解集为$\{x\mid x>4\}$.

任务2

【探究活动】

例1　解:(1)$f(x)=\log_3\left(\frac{1}{3}x\right)\cdot\log_3(27x)=(-1+\log_3 x)(3+\log_3 x)$,$x\in\left[\frac{1}{9},3\right]$,

令$t=\log_3 x$,则$t\in[-2,1]$.令$g(t)=(-1+t)(3+t)=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$,

当$t=-1$时,$g(t)$取得最小值,$g(t)_{\min}=g(-1)=-4$;

当$t=1$时,$g(t)$取得最大值,$g(t)_{\max}=g(1)=0$.

故函数$f(x)$的值域为$[-4,0]$.

(2)**解:**①因为$f(x)=\log_a(1+x)+\log_a(5-x)$($a>0$,且$a\neq1$),且$f(2)=-2$,

所以$f(2)=\log_a 3+\log_a 3=-2$,即$\log_a 3=-1$,解得$a=\frac{1}{3}$.

故$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1+x)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)$,令$\begin{cases}1+x>0,\\5-x>0,\end{cases}$解得$-1<x<5$.

故$f(x)$的定义域为(−1,5).

②由①可知,$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1+x)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)=\log_{\frac{1}{3}}[(1+x)(5-x)]=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+5)$.

设$t=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$,$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$,

则$x=2$时,t取最大值9,$x=4$时,t取最小值5,所以$t\in[5,9]$.

因为函数$y=\log_{\frac{1}{3}}t$在定义域内单调递减,

所以$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},4\right]$上的最大值为$\log_{\frac{1}{3}}5$,最小值为$\log_{\frac{1}{3}}9=-2$.

【应用迁移】

解:(1)$f(x)$的定义域为**R**.

因为$3^x>0$,所以$3^x+1>1$.

因为$y=\log_2 u$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以$\log_2(3^x+1)>\log_2 1=0$,

所以$f(x)$的值域为$(0,+\infty)$.

(2)因为$f(x)=\log_2\frac{x}{4}\times\log_2\frac{x}{2}=(\log_2 x-2)\cdot(\log_2 x-1)=\left(\log_2 x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,$1\leqslant x\leqslant4$,

所以$0\leqslant\log_2 x\leqslant2$,

所以当$\log_2 x=\frac{3}{2}$,即$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$时,$f(x)$取最小值$-\frac{1}{4}$;

当$\log_2 x=0$,即$x=1$时,$f(x)$取得最大值2,

所以函数$f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

任务3

【探究活动】

例2　解:令$u=g(x)=x^2-ax+a$,$g(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$上单调递减.

因为$0<\frac{1}{2}<1$,所以$y=\log_{\frac{1}{2}}u$是减函数.

已知复合函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$在区间$(-\infty,\sqrt{2})$上单调递增,

所以$g(x)$在$(-\infty,\sqrt{2})$上单调递减,且$g(x)>0$在$(-\infty,\sqrt{2})$上恒成立,

即$\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{2},\\(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+a\geqslant0,\end{cases}$解得$2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2(\sqrt{2}+1)$.

故实数a的取值范围是$[2\sqrt{2},2(\sqrt{2}+1)]$.

【应用迁移】

解:(1)当$a=2$时,$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+10)$,

令$t=x^2-2x+10=(x-1)^2+9$,

所以$t\geqslant9$,$f(x)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}9=-2$,

所以$f(x)$的值域为$(-\infty,-2]$.

(2)设$u(x)=x^2-ax+5a$,因为$y=\log_{\frac{1}{3}}x$在$(0,+\infty)$上单调递减,且$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $u(x)=x^2-ax+5a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $x>1$ 时 $u(x)>0$，

所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 1,\\ 1+4a\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2$.

所以 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

任务 4

【探究活动】

例 3 (1)**证明**：$g(x)=f(x-2)=\ln(x-2+6)-\ln[2-(x-2)]=\ln\frac{x+4}{4-x}$，$x\in(-4,4)$.

对任意的 $x\in(-4,4)$，都有 $-x\in(-4,4)$，且 $g(-x)=\ln\frac{-x+4}{4+x}=-\ln\frac{x+4}{4-x}=-g(x)$，

所以 $g(x)$ 是奇函数.

(2)**解**：由题易知，$f(x)$ 的定义域为 $(-6,2)$. $f(x)$ 在 $(-6,2)$ 内单调递增. 证明如下：

在 $(-6,2)$ 内任取两个数 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{x_1+6}{2-x_1}-\ln\frac{x_2+6}{2-x_2}=\ln\frac{(x_1+6)(2-x_2)}{(2-x_1)(x_2+6)}$

$=\ln\frac{12-x_1x_2+2x_1-6x_2}{12-x_1x_2-6x_1+2x_2}$.

由 $x_1<x_2$ 可知，$8(x_1-x_2)<0$，所以 $2x_1-6x_2<2x_2-6x_1$，

所以 $\frac{12-x_1x_2+2x_1-6x_2}{12-x_1x_2-6x_1+2x_2}<1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-6,2)$ 内单调递增.

(3)**解**：因为 $g(x)=f(x-2)$ 是奇函数，所以 $f(-x-2)=-f(x-2)$，

$f(4^t-3)+f(k\cdot 2^t)>0$，即 $f(4^t-3)+f[(k\cdot 2^t+2)-2]>0$，

所以 $f(4^t-3)>-f[(k\cdot 2^t+2)-2]=f[-(k\cdot 2^t+2)-2]$，即 $f(4^t-3)>f(-k\cdot 2^t-4)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(-6,2)$ 内单调递增，

所以 $2>4^t-3>-k\cdot 2^t-4>-6$，

所以 $\begin{cases}4^t-3>-k\cdot 2^t-4,\\ -k\cdot 2^t-4>-6,\end{cases}$ 即 $-\left(2^t+\frac{1}{2^t}\right)<k<2^{1-t}$.

因为 $2^t+\frac{1}{2^t}\geqslant 2$，当且仅当 $2^t=1$，即 $t=0$ 时，取等号，所以 $k>-2$.

由 $t\in[0,1]$ 可知，$2^{1-t}\geqslant 1$，所以 $k<1$.

故实数 k 的取值范围为 $(-2,1)$.

【应用迁移】

1. $-\frac{1}{2}$　$\ln 2$

2.解：(方法一)由 $\sqrt{1+x^2}-x>0$ 可得 $x\in\mathbf{R}$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

又 $f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=-\lg(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$，

即 $f(-x)=-f(x)$.

所以函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是奇函数.

(方法二)由 $\sqrt{1+x^2}-x>0$ 可得 $x\in\mathbf{R}$，

$f(x)+f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)+\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg[(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)]$

$=\lg(1+x^2-x^2)=0$.

所以 $f(-x)=-f(x)$.

所以函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是奇函数.

4.4.3　不同函数增长的差异

问题式预习

【知识清单】

知识点

单调递增　单调递增　单调递增　快于　快于

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　(4)×　**2.**A

任务型课堂

任务 1

1.A

2.B　**解析**：从题表格可以看出，三个变量 y_1,y_2,y_3 都是越来越大，但是增长速度不同，其中变量 y_1 的增长速度最快，呈指数型函数变化，变量 y_3 的增长速度最慢，呈对数型函数变化. 故选 B.

[一题多思]

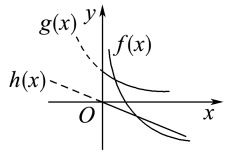
思考 1.提示：C.

思考 2.提示：当增长速度很快时，常选用指数函数模型；当不断增长，但又不会增长过快，也不会增长很大时，常选用对数函数模型.

任务 2

【探究活动】

例 1　C　**解析**：函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$h(x)=-\frac{x}{100}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的图象如下图所示.



函数 $f(x)$ 的图象在区间 $(0,1)$ 上递减较快，但递减速度逐渐变慢；函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递减较慢，且速度越来越慢. 同样，函数 $g(x)$ 的图象在区间 $(0,+\infty)$ 上递减较慢，且递减速度越来越慢. 函数 $h(x)$ 的图象递减速度比较平稳.

【应用迁移】

解：(1)C_1 对应的函数为 $g(x)=x^3$，C_2 对应的函数为 $f(x)=2^x$.

(2)因为 $f(1)>g(1)$，$f(2)<g(2)$，$f(9)<g(9)$，$f(10)>g(10)$，

所以 $1<x_1<2$，$9<x_2<10$，

所以 $x_1<6<x_2$，$2\,026>x_2$，

从图象上可以看出，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f(x)<g(x)$，所以 $f(6)<g(6)$.

当 $x>x_2$ 时，$f(x)>g(x)$，所以 $f(2\,026)>g(2\,026)$.

又因为 $g(2\,026)>g(6)$，所以 $f(2\,026)>g(2\,026)>g(6)>f(6)$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：由题意知，将产量随月份变化的离散量分别抽象为 $A(1,1)$，$B(2,1.2)$，$C(3,1.3)$，$D(4,1.37)$ 这四点.

①当函数为 $y=ax+b$ 时，将 B，C 两点的坐标代入解析式，

得 $\begin{cases}3a+b=1.3,\\2a+b=1.2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$

所以 $y=0.1x+1$.

由此可得结论：在不增加工人和设备的条件下，产量会每月增加 1 000 双，这是不太现实的.

②当函数为 $y=ax^2+bx+c$ 时，将 A，B，C 三点的坐标代入解析式，得 $\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$

所以 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

由此函数计算 4 月份的产量为 1.3 万双，比实际产量少 700 双，而且由二次函数性质可知，产量自 4 月份开始将每月下降(图象开口向下，对称轴为 $x=3.5$)，不符合实际.

③当函数为 $y=ab^x+c$ 时，将 A，B，C 三点的坐标代入函数式，

得 $\begin{cases}ab+c=1,①\\ab^2+c=1.2,②\\ab^3+c=1.3.③\end{cases}$

由①，得 $ab=1-c$，代入②③，

得 $\begin{cases}b(1-c)+c=1.2,\\b^2(1-c)+c=1.3,\end{cases}$

则 $\begin{cases}c=\dfrac{1.2-b}{1-b},\\c=\dfrac{1.3-b^2}{1-b^2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$

则 $a=\dfrac{1-c}{b}=-0.8$.

所以 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

把 $x=4$ 代入得 $y=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$.

比较上述三个函数模型的优劣，既要考虑误差，又要考虑生产的实际，如：增产的趋势和可能性.经过筛选，模型 $y=ab^x+c$ 最合适，一是误差小，二是由于厂房新建，随着工人技术和管理效益逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但经过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而该函数模型恰好反映了这种趋势.

因此选用模型 $y=ab^x+c$.

【应用迁移】

1.ABD

2.**解**：(1)函数应为增函数，故第一种函数模型不符合；

若选择第二种模型，代入(40，5.2)得 $5.2=0.04\times40+b$，解得 $b=3.6$，

所以 $Q(v)=0.04v+3.6$，此时 $Q(90)=7.2$，$Q(100)=7.6$，$Q(120)=8.4$，与实际数据相差较大，故第二种不符合；

经观察，第三种函数模型最符合实际，

代入(40，5.2)，可得 $0.000\,025\times40^3-0.004\times40^2+c\times40=5.2$，即 $1.6-6.4+c\times40=5.2$，解得 $c=0.25$，

所以 $Q(v)=0.000\,025v^3-0.004v^2+0.25v$，

此时，$Q(60)=6$，$Q(90)=8.325$，$Q(100)=10$，$Q(120)=15.6$，符合题意，

所以 $Q(v)=0.000\,025v^3-0.004v^2+0.25v$.

(2)设总耗油量为 W L，

则 $W=\dfrac{100}{v}\times Q(v)=0.002\,5v^2-0.4v+25$

$=0.002\,5(v-80)^2+9$，$40\leqslant v\leqslant120$，

当 $v=80$ 时，W 取得最小值为 9，

所以这辆车应以 80 km/h 的速度行驶才能使总耗油量最少.

4.5 函数的应用(二)

4.5.1 函数的零点与方程的解

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$f(x)=0$

知识点二

实数解　零点　x 轴

知识点三

连续不断　$f(a)f(b)<0$　$f(c)=0$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√　**2**.D

任务型课堂

任务 1

解：(1)令 $x^3+8=0$，得 $x=-2$.

所以函数 $f(x)=x^3+8$ 的零点为 -2.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的定义域为 $(0,3)\cup(3,+\infty)$.

令 $\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}=0$，得 $x+2=0$ 或 $\ln x=0$，

所以 $x=-2$(舍去)或 $x=1$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的零点为 1.

(3)当 $x\leqslant0$ 时，令 $2^{-x}-4=0$，得 $x=-2$，满足要求；当 $x>0$ 时，令 $\lg x=0$，得 $x=1$，满足要求.

所以函数 $f(x)$ 的零点是 -2，1.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)ABD **解析**：由题知 $f(0)f(1)<0$，所以根据函数零点存在定理可得，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定有零点.又 $f(1)f(2)>0$，因此无法判断 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内是否有零点.

(2)C **解析**：函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+x-2$ 是连续函数，

$f(2)=\frac{1}{4}+2-2=\frac{1}{4}>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}-2=\frac{\sqrt{2}-2}{4}<0$，

可得 $f(2)f\left(\frac{3}{2}\right)<0$.由函数零点存在定理可知，函数 $f(x)$ 的零点在 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 内.故选 C.

(3)C **解析**：令 $f(x)=2x+\ln x-5$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且 $f(x)$ 单调递增.

对于 A，因为 $f(4)=8+\ln 4-5=3+\ln 4>0$，$f(5)=10+\ln 5-5=5+\ln 5>0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(4,5)$ 内，所以 A 错误；

对于 B，因为 $f(4)>0$，$f(3)=6+\ln 3-5=1+\ln 3>0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(3,4)$ 内，所以 B 错误；

对于 C，因为 $f(3)>0$，$f(2)=4+\ln 2-5=\ln 2-1<0$，

所以 $f(x)$ 的零点在 $(2,3)$ 内，所以方程 $2x+\ln x-5=0$ 的解所在区间为 $(2,3)$，所以 C 正确；

对于 D，因为 $f(2)<0$，$f(1)=2+\ln 1-5=-3<0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(1,2)$ 内，所以 D 错误.故选 C.

【应用迁移】

1.C

2.$(0,1)$ **解析**：由题意，函数 $f(x)=\ln x-m$ 在定义域上单调递增，又因为函数零点位于区间 $(1,e)$ 内，所以 $f(1)=-m<0$，$f(e)=1-m>0$，解得 $0<m<1$，故 $m\in(0,1)$.

任务 3

【探究活动】

例 2 (1)C **解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，令 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=1$(舍去)；

当 $x>0$ 时，令 $-2+\ln x=0$，

解得 $x=e^2$.

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$ 有 2 个零点.故选 C.

(2)1 **解析**：因为 $f(0)=1+0-2=-1<0$，

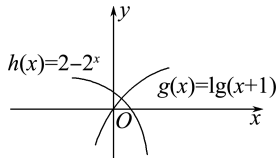
$f(1)=2+\lg 2-2>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在零点.

又 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，故 $f(x)$ 有且只有一个零点.

[一题多思]

思考 1.提示：在同一平面直角坐标系中作出函数 $h(x)=2-2^x$ 和 $g(x)=\lg(x+1)$ 图象的草图，如图所示.

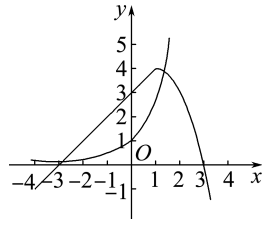


由图象知，函数 $g(x)=\lg(x+1)$ 和 $h(x)=2-2^x$ 的图象有且只有一个交点，

故 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 有且只有一个零点.

思考 2.提示：函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 的零点个数即为函数 $y=f(x)$ 与 $y=e^x$ 的图象的交点个数.

作出函数图象如图所示.



由可知，两函数图象有两个交点，

即函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 有两个零点.

思考 3.提示：当 $x>0$ 时，由 $f(x)=\ln x=0$，得 $x=1$.

因为函数 $f(x)$ 有两个不同的零点，

所以当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=2^x-a$ 有一个零点，

令 $f(x)=0$，得 $a=2^x$.

因为 $0<2^x\leqslant 2^0=1$，所以 $0<a\leqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(0,1]$.

【应用迁移】

1.B **解析**：因为函数 $y=f(x)$ 的图象是连续不间断的，且 $f(1.75)f(1.875)<0$，所以根据函数零点存在定理，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1.75,1.875)$ 上至少存在 1 个零点；同理，由 $f(1.875)f(2)<0$，可知函数 $f(x)$ 在区间 $(1.875,2)$ 上至少存在 1 个零点.因此，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上至少存在 2 个零点.故选 B.

2.$[0,1)$ **解析**：函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+m-1$ 的图象与 x 轴有公共点，即 $m-1=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 有实数解.

由于 $-1\leqslant-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}<0$，故 $-1\leqslant m-1<0$，解得 $0\leqslant m<1$.

4.5.2 用二分法求方程的近似解

问题式预习

【知识清单】

知识点一

连续不断 $f(a)f(b)<0$ 一分为二 逐步逼近零点

知识点二

(1)$f(a)f(b)<0$ (2)c (3)①c ②(a,c) ③(c,b)

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　(4)√　2.0.625

任务型课堂

任务 1

1.A

2.C　**解析**：由函数图象可得，A 中的函数没有零点，不能用二分法求零点，故排除 A；B 和 D 中的函数有零点，但函数在零点两侧的函数值符号相同，故不能用二分法求零点，排除 B 和 D；只有 C 中的函数存在零点且函数在零点两侧的函数值的符号相反，故能用二分法求函数的零点．故选 C.

3.ABD

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：令 $f(x)=2x^3+3x-3$，

经计算，$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，$f(0)f(1)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，

即方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0,1)$ 内有解．

取 $(0,1)$ 的中点 0.5，经计算 $f(0.5)<0$.

又 $f(1)>0$，所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0.5,1)$ 内有解．

如此继续下去，得到方程的正实数解所在的区间，如下表：

(a,b)	中点 c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
$(0,1)$	0.5	$f(0)<0$	$f(1)>0$	$f(0.5)<0$
$(0.5,1)$	0.75	$f(0.5)<0$	$f(1)>0$	$f(0.75)>0$
$(0.5,0.75)$	0.625	$f(0.5)<0$	$f(0.75)>0$	$f(0.625)<0$
$(0.625,0.75)$	0.687 5	$f(0.625)<0$	$f(0.75)>0$	$f(0.687\ 5)<0$

由于 $|0.687\ 5-0.75|=0.062\ 5<0.1$，

所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个精确度为 0.1 的正实数近似解可取为 0.75.

［一题多思］

思考 1.提示：初始区间既要包含所求的根，又要使其长度尽量小．

思考 2.提示：看区间的长度是否达到给定的精确度．

思考 3.提示：区间内的任一点都可以作为零点的近似解，一般取端点作为零点的近似解．

思考 4.提示：在本例的基础上，取区间 $(0.687\ 5,0.75)$ 的中点 $x=0.718\ 75$，因为 $f(0.718\ 75)<0$，$f(0.75)>0$，且 $|0.718\ 75-0.75|=0.031\ 25<0.05$，所以 $x=0.72$ 可作为方程的一个近似解．

【应用迁移】

解：利用二分法，

$f(1)=-1<0$，$f(1.5)=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}-1=\frac{7}{8}>0$，$f(1.25)=\frac{125}{64}-\frac{5}{4}-1<2-\frac{5}{4}-1=-\frac{1}{4}<0$，

故零点在 $(1.25,1.5)$ 内，此时 $|1.5-1.25|=0.25>0.1$.

又 $\frac{1.25+1.5}{2}=1.375$，$f(1.375)\approx 2.600-1.375-1=0.225>0$，

所以零点在区间 $(1.25,1.375)$ 内，此时 $|1.25-1.375|=0.125>0.1$.

又 $\frac{1.25+1.375}{2}=1.312\ 5$，$f(1.312\ 5)\approx 2.261-1.312\ 5-1=-0.051\ 5<0$，

所以零点在区间 $(1.312\ 5,1.375)$ 内，此时 $|1.375-1.312\ 5|=0.062\ 5<0.1$，

故 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间 $(1,1.5)$ 内的一个零点的近似值是 1.312 5.

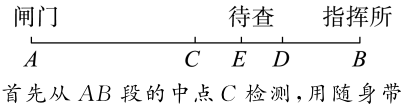
任务 3

【探究活动】

例 2　**解**：将 26 枚金币平均分成两份，放在天平上，假币在轻的那 13 枚金币里面；将这 13 枚金币拿出 1 枚，将剩下的 12 枚平均分成两份，若天平平衡，则假币一定是拿出的那一枚，若不平衡，则假币一定在轻的那 6 枚金币里面；将这 6 枚金币平均分成两份，则假币一定在轻的那 3 枚金币里面；将这 3 枚金币任意拿出 2 枚放在天平上，若平衡，则剩下的那一枚是假币，若不平衡，则轻的那一枚是假币．依据上述分析，最多称 4 次就可以发现这枚假币．

【应用迁移】

解：如图，



工人师傅首先从 AB 段的中点 C 检测，用随身带的话机向两端测试，若发现 AC 段正常，则故障在 BC 段；再从 BC 段的中点 D 检测，若发现 BD 段正常，则故障在 CD 段；再从 CD 段的中点 E 检测……由此类推，每查一次，可以把待查的线路长度缩减一半，可以算出经过 n 次检测，所剩线路的长度为 $\frac{10\ 000}{2^n}$ m，则有 $\frac{10\ 000}{2^n}\leqslant 100$，即 $2^n\geqslant 100$．又因为 $2^6=64$，$2^7=128$，所以最多只要检测 7 次就能找到故障地点所在区域．

4.5.3　函数模型的应用

问题式预习

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　(4)×　2.D

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**：对于 $y=a\log_3 x+b$，当 $x=2$ 时，$y=10$；当 $x=6$ 时，$y=30$，所以 $\begin{cases}10=a\log_3 2+b,\\30=a\log_3 6+b,\end{cases}$ 解得 $a=20$，$b=10-20\log_3 2$，所以 $y=20\log_3 x+10-20\log_3 2$．设达到 50 m 的高度需要 x s，则 $20\log_3 x+10-20\log_3 2=50$，解得 $x=$

18.所以达到 50 m 的高度需要 18 s.故选 C.

2.6　10 000

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**:(1)由题意,可得方程组$\begin{cases}64=c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4}.\end{cases}$

(2)由(1)知 $y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$.

由题意,可得 $128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant 0.5$,

即$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$,即$\frac{t}{4}\geqslant 8$,解得 $t\geqslant 32$.

所以至少排气 32 min,这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态.

[一题多思]

思考 1.提示:在实际问题中,有关人口增长、银行复利、细胞分裂等增长率问题常可以用指数函数模型表示,通常可以表示为 $y=N(1+p)^x$(其中 N 为基础数,p 为增长率,x 为时间)的形式.

思考 2.提示:常常利用等式的两边取对数的方法,将指数运算转化为对数运算.

思考 3.提示:对数型函数应用题一般都会给出含参数的函数解析式,解题策略:首先根据实际情况求出函数解析式中的参数,或从给出的具体情境中提炼出数据,代入解析式求值,然后根据数值回答其实际意义.

【应用迁移】

A

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**:(1)从题表中数据可得,该函数单调递增,故不可能是①,

且函数增长的速度越来越快,所以选择③$y=m\cdot a^x+n$($a>0$,且 $a\neq 1$).

代入表格中的三组数据,可得$\begin{cases}18=ma+n,\\24=ma^2+n,\\33=ma^3+n,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=8,\\a=\frac{3}{2},\\n=6,\end{cases}$

所以 $y=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6$,$x\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)可知 $y=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6$,$x\in\mathbf{N}^*$,

令 $8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6>\frac{1}{2}\times 300$,

整理得 $x>\log_{\frac{3}{2}}18=\frac{\lg 18}{\lg\frac{3}{2}}=\frac{\lg 2+2\lg 3}{\lg 3-\lg 2}\approx\frac{0.301+2\times 0.477}{0.477-0.301}\approx 7.131$,且 $x\in\mathbf{N}^*$,则 $x\geqslant 8$.

所以 8 周后,全校将有超过一半的学生参与其中.

【应用迁移】

解:(1)依题意,所选函数必须满足三个条件:①定义域包含$[2,+\infty)$;②增函数;③随着自变量的增加,函数值的增长速度变小.

函数 $y=a\sqrt{x-3}+b$ 的定义域为$[3,+\infty)$,$x=2$ 时无意义;函数 $y=2^{x-a}+b$ 随着自变量的增加,函数值的增长速度变大;函数 $y=a\log_2 x+b$ 可以同时满足上述三个条件.

所以应该选择函数 $y=a\log_2 x+b$.

(2)依题意知$\begin{cases}a\log_2 4+b=2a+b=4,\\a\log_2 8+b=3a+b=4.5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=3,\end{cases}$

所以 $y=\frac{1}{2}\log_2 x+3$.

令 $y=\frac{1}{2}\log_2 x+3\geqslant 5$,解得 $x\geqslant 16$.

所以,至少再经过 14 h,细菌数量达到 5 百万个.

第五章　三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)一条射线　端点　(3)逆时针方向旋转　顺时针方向旋转　没有做任何旋转

知识点二

(1)旋转方向　旋转量　(2)$-\alpha$　(3)①$\alpha+\beta$　②$\alpha+(-\beta)$

知识点三

(1)x　(2)第几象限角

知识点四

整数个周角

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)√　**2.**BC

任务型课堂

任务 1

1.B　**2.**B

3.AD　**解析**:对于 A,由正角和负角的定义得,所有的正角都比负角大,故 A 正确,

对于 B,只有始边与终边没有做任何旋转,始边与终边重合的角才是零角,故 B 错误,

对于 C,取一个第三象限的角为 225°,一个第二象限的角为 480°,

则 225°<480°,可得第三象限的角不一定大于第二象限的角,故 C 错误,

对于 D,设 α 为锐角,β 为钝角,由锐角的定义得 $\alpha\in$

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

由第一象限角的定义得 α 一定是第一象限角，

由第二象限角的定义得 β 一定是第二象限角，即锐角一定是第一象限角，钝角一定是第二象限角，故 D 正确.

任务 2

1.解：(1)设 $\alpha=\beta+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

则 $\beta=-1\ 910°-k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

令 $-1\ 910°-k\cdot360°\geqslant0°$，解得 $k\leqslant-\frac{191}{36}$，

则 k 的最大整数解为 $k=-6$，得 $\beta=250°$，

于是 $\alpha=250°-6\times360°$，它是第三象限角.

(2)令 $\theta=250°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

取 $-720°\leqslant\theta<0°$，

得 $k=-1$ 或 -2，

故 $\theta=-110°$ 或 $-470°$.

2.解：终边在 30°角的终边所在直线上的角的集合为 $S_1=\{\alpha|30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在 105°角的终边所在直线上的角的集合为 $S_2=\{\alpha|105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

因此，终边在图中阴影部分的角 α 的集合为 $\{\alpha|30°+k\cdot180°\leqslant\alpha<105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

任务 3

【探究活动】

例 A **解析**：因为 α 是第三象限角，所以 $180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，所以 $90°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<135°+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=0$ 时，$90°<\frac{\alpha}{2}<135°$，在第二象限；当 $k=1$ 时，$270°<\frac{\alpha}{2}<315°$，在第四象限. 故选 A.

[一题多思]

思考 1.提示：$\frac{\alpha}{2}$ 的终边位于第一或第三象限.

思考 2.提示：有. 将直角坐标系的每个象限二等分，得到 8 个区域. 自 x 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ……如图 1 所示，图中与角 α 所在象限标号一致的区域，即为 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的区域. 如 α 是第二象限角，与角 α 所在象限标号一致的区域Ⅱ，即为 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的区域，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边位于第一或第三象限.

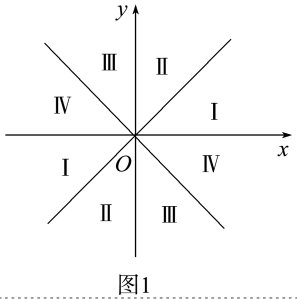


图1

将直角坐标系的每个象限三等分，得到 12 个区域. 自 x 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ……如图 2 所示，图中与角 α 所在象限标号一致的区域，即为 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的区域. 如 α 是第三象限角，与角 α 所在象限标号一致的区域Ⅲ，即为 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的区域，所以 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位于第一、第三或第四象限.

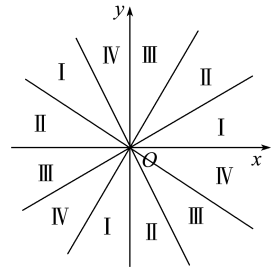


图2

【应用迁移】

1.CD **2.**AC

3.BCD **解析**：由 α 为第四象限角，得 $k\cdot360°-90°<\alpha<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\cdot120°-30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°-30°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第四象限；

当 $k=3n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°+90°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°+120°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二象限；

当 $k=3n+2,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°+210°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°+240°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限.

5.1.2 弧度制

问题式预习

【知识清单】

知识点一

度 $\frac{1}{360}$ 弧度 半径长 正数 负数 0 $\frac{l}{r}$

知识点二

(1)$\frac{\pi}{180}$ $\left(\frac{180}{\pi}\right)°$ (2)$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{2}$

知识点三

αR

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)√ (4)× **2.**$(40+6\pi)$

任务型课堂

任务 1

1.B　**解析**：正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，A 错误；

整圆的圆心角是 2π，故四分之一圆所对的圆心角是 $\frac{\pi}{2}$，B 正确；

角的终边顺时针旋转一周得到的角是 -2π，角的终边逆时针旋转一周得到的角是 2π，C 错误；

无论是角度制还是弧度制，角的大小都与圆的半径无关，D 错误.

2.BC　**3.**A

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)B　**解析**：因为 $\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以 3 rad 的角终边在第二象限.

(2)C　**解析**：当 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$；当 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{3\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$. 故选 C.

(3)**解**：$-1\ 125^\circ=-1\ 125\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25\pi}{4}=-8\pi+\frac{7\pi}{4}$，

其中 $\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}<2\pi$，所以 $\frac{7\pi}{4}$ 是第四象限角，

所以 $-1\ 125^\circ$ 是第四象限角.

[一题多思]

思考 1.提示：第三象限.

思考 2.提示：终边在射线 OA 上的角为 $\theta=135^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

终边在射线 OB 上的角为 $\theta=-30^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故终边在阴影部分内（包括边界）的角 θ 的集合为 $\left\{\theta\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

思考 3.提示：由本例(3)可得，与 α 终边相同的角为 $\frac{7\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

由 $-4\pi\leqslant\frac{7\pi}{4}+2k\pi\leqslant4\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k=-2,-1,0,1$，

所以所求角的集合为 $\left\{-\frac{9\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{4}\right\}$.

【应用迁移】

1. $\left\{\alpha\,\middle|\,n\pi\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$

2.解：(1)因为 $-800^\circ=-3\times360^\circ+280^\circ$，$280^\circ=\frac{14\pi}{9}$，

且 $\frac{14\pi}{9}\in[0,2\pi)$，

所以 $\alpha=\frac{14\pi}{9}+(-3)\times2\pi$.

所以 α 与 $\frac{14\pi}{9}$ 终边相同，是第四象限角.

(2)因为与 α 终边相同的角为 $\frac{14\pi}{9}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，而 γ 与 α 的终边相同，且 $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}<\frac{14\pi}{9}+2k\pi<\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $k=-1$，

所以 $\gamma=\frac{14\pi}{9}+(-1)\times2\pi=-\frac{4\pi}{9}$.

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**：(1)因为 $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$，所以 $l=10\times\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$(cm).

(2)由已知得 $l+2R=20$，所以 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R=10R-R^2=-(R-5)^2+25$，

所以当 $R=5$ cm 时，S 取得最大值 25 cm^2，

此时 $l=10$ cm，$\alpha=2$ rad.

【应用迁移】

1.B　**解析**：$\angle AOB=135^\circ$，即 $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$，

扇形 AOB 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times3^2=\frac{27\pi}{8}$，

扇形 COD 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times1^2=\frac{3\pi}{8}$，

则曲边四边形 $ABDC$ 的面积为 $\frac{27\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}=3\pi$.

2.解：(1)设弧田所在圆的半径为 r，则 $r=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，

所以 $S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2^2=\frac{4\pi}{3}$.

又因为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，

所以 $S_{实际}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}=\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$(m^2).

(2)由(1)可得，圆心到弦的距离为 1，所以矢长为 1.

按照弧田面积的经验公式计算得

$\frac{1}{2}$(弦×矢+矢^2)=$\frac{1}{2}$×(2$\sqrt{3}$×1+1^2)=$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

所以$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\approx0.1(\mathrm{m}^2)$.

故按照弧田面积的经验公式计算结果比实际少 0.1 m^2.

5.2 三角函数的概念

5.2.1 三角函数的概念

第 1 课时 三角函数的概念(1)

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)sin α (2)cos α (3)tan α

知识点二

$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right.\right\}$

【概念辨析】

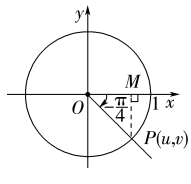
1.(1)√ (2)× (3)× (4)√ (5)× **2.**B

任务型课堂

任务 1

1.B **2.**$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3.解:如图,角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边与单位圆交于点 P,过点 P 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 M.



设点 $P(u,v)$,则 $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 sin α = $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,cos $\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

任务 2

【探究活动】

例 (1)D **解析**:因为角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$,所以 $x=3$,$y=-4$,$r=|OP|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$,$O$ 为坐标原点,所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{4}{5}+\frac{5}{3}=\frac{13}{15}$.

(2)**解**:由题意得 $x=m$,$y=\sqrt{3}$,

所以 $r=|OP|=\sqrt{m^2+3}$,O 为坐标原点.

所以 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+3}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,

解得 $m=\sqrt{5}$.所以 $r=2\sqrt{2}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

[一题多思]

思考 1.提示:(1)若该点 $P(x,y)(x\neq0)$ 是单位圆上一点,则 $\sin\alpha=y$,$\cos\alpha=x$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(2)若该点 $P(x,y)(x\neq0)$ 不是单位圆上一点,则先求 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,再求 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

思考 2.提示:$r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$.

①若 $a>0$,则 $r=5a$,角 α 在第二象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$,

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若 $a<0$,则 $r=-5a$,角 α 在第四象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$,

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

思考 3.提示:由 $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$,得 $y^2=5$,

所以 $y=\pm\sqrt{5}$.

当 $y=\sqrt{5}$ 时,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$,$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$;

当 $y=-\sqrt{5}$ 时,$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4}$,$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

【应用迁移】

1.B **解析**:因为角 α 的终边经过点 $M(-12,5)$,

则 $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}=\frac{5}{13}$,$\cos\alpha=\frac{-12}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}=-\frac{12}{13}$.

所以 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=\frac{3\times5}{13}-\left(-\frac{2\times12}{13}\right)=3$.

2.解:因为角 α 的终边在直线 $\sqrt{3}x+y=0$ 上,

所以在角 α 的终边上任取一点 $P(t,-\sqrt{3}t)(t\neq0)$,

则 $r=\sqrt{t^2+(-\sqrt{3}t)^2}=2|t|$.

当 $t>0$ 时,$r=2t$,$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}t}{2t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\alpha=\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}$,

$\tan\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}t}{t}=-\sqrt{3}$；

当 $t<0$ 时，$r=-2t$，$\sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}t}{-2t}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha=\dfrac{t}{-2t}=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}t}{t}=-\sqrt{3}$.

第 2 课时　三角函数的概念(2)

问题式预习

【知识清单】

知识点一

\+　\+　\+

知识点二

相等　$\sin\alpha$　$\cos\alpha$　$\tan\alpha$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×　**2.**$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

任务型课堂

任务 1

1.D　**解析**：因为 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha=\sin\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}>0$，所以 $\cos\alpha>0$，所以 α 是第一或第四象限角.

2.B　**解析**：因为 $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}-\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=2$，所以 $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}=1$，$\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=-1$，即 $\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，所以 α 是第二象限角.

3.解：(1)因为 $\dfrac{\pi}{2}<3<\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}<5<2\pi$，

所以角 3，4，5 的终边分别在第二、三、四象限.

所以 $\sin 3>0$，$\cos 4<0$，$\tan 5<0$.

(2)由 $-672°20'=47°40'+(-2)\times360°$，

可知 $-672°20'$ 是第一象限角，所以 $\tan(-672°20')>0$.

[一题多思]

思考.提示：依据题目中所有三角函数值的符号来分别确定角的终边所在的象限，它们的公共象限即为所求.

任务 2

【探究活动】

例　解：(1)原式 $=\sin(2\times360°+90°)+\cos(360°+0°)-\tan(3\times360°+45°)$

$=\sin 90°+\cos 0°-\tan 45°$

$=1+1-1$

$=1$.

(2)原式 $=\sin\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{5}\right)\tan(4\pi+0)=\sin\dfrac{\pi}{6}+0\times\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

(3)原式 $=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\tan\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$.

【应用迁移】

解：(1)原式 $=\cos\left(8\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$.

(2)原式 $=\sin(2\times360°+90°)+\tan(3\times360°+45°)+\cos(360°+60°)=\sin 90°+\tan 45°+\cos 60°=1+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

5.2.2　同角三角函数的基本关系

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　(2)$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$

知识点二

(1)$1-\cos^2\alpha$　$1-\sin^2\alpha$　(2)$\cos\alpha\tan\alpha$　$\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　(5)√　**2.**A

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　解：(1)D　**解析**：由 $\sin\theta+2\cos\theta=0$，移项可得 $\sin\theta=-2\cos\theta$.

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 及 $\sin\theta=-2\cos\theta$ 可得，

$(-2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$，可得 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$，

得 $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 θ 是第二象限角，所以 $\cos\theta<0$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)**解**：因为 α 为第二象限角，且 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，

所以 $\sin\alpha>0$，且 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$.

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{12}$.

(3)因为 $\tan\alpha=-\dfrac{15}{8}<0$，所以 α 是第二或第四象限角.

由 $\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{15}{8},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 得 $\sin^2\alpha=\left(\dfrac{15}{17}\right)^2$.

当 α 是第二象限角时，$\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$；

当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$.

【应用迁移】

1.$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

2.**解**：因为 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 是第三象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

任务 2

【探究活动】

例 2 **解**：(1)由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，两边平方得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，所以 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\frac{7}{5}$.

因为 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

[一题多思]

思考 1.提示：(1)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$；

(2)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$；

(3)$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$；

(4)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$.

思考 2.提示：已知 $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 中任何一个式子的值，则另外两个式子的值均可求出.

例 3 **解**：由 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，化简得 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，

所以 $\tan\alpha=3$.

(1)原式 $=\frac{3\times3\cos\alpha-\cos\alpha}{2\times3\cos\alpha+3\cos\alpha}=\frac{8\cos\alpha}{9\cos\alpha}=\frac{8}{9}$.

(2)原式 $=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1$

$=\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\frac{3^2-2\times3}{3^2+1}+1=\frac{13}{10}$.

【应用迁移】

1.ACD

2.**解**：(1)$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{5}$.

(2)$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{3\tan\alpha-2}{\tan^2\alpha-1}=\frac{4}{3}$.

任务 3

【探究活动】

例 4 (1)**解**：$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $0<\cos\alpha<1$，$-1<\sin\alpha<0$，

所以 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}$

$=\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}=-\frac{2}{\sin\alpha}$.

(2)**证明**：$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan^2\theta-1}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\sin\theta+\cos\theta$.

【应用迁移】

1.**解**：原式 $=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\begin{cases}1,\sin\alpha>0,\\-1,\sin\alpha<0.\end{cases}$

2.**证明**：(方法一)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$①.

因为 $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$，

所以 $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，

所以 $\sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$②.

由①②，得 $\sin^2\beta=\frac{\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha-1$.

(方法二)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\alpha+1=2(\tan^2\beta+1)$.

所以 $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cdot\frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$.

所以 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\beta}$.

所以 $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha$.所以 $1-\sin^2\beta=2(1-\sin^2\alpha)$.

所以 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

5.3 诱导公式

第1课时 诱导公式二～四

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$-\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $\tan\alpha$ (2)$-\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $-\tan\alpha$

(3)$\sin\alpha$ $-\cos\alpha$ $-\tan\alpha$

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)√ (4)×

2.(1)$-\frac{1}{2}$ (2)$-\frac{1}{2}$ (3)-1

解析:(1)$\sin 690^\circ=\sin(360^\circ+330^\circ)=\sin 330^\circ$

$=\sin(180^\circ+150^\circ)=-\sin 150^\circ$

$=-\sin(180^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

(2)$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\frac{20\pi}{3}$

$=\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3)$\tan(-1\,845^\circ)=\tan(-5\times360^\circ-45^\circ)=\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1 **解:**(1)原式$=\cos 480^\circ+\sin(180^\circ+30^\circ)$

$=\cos(360^\circ+120^\circ)-\sin 30^\circ=\cos 120^\circ-\frac{1}{2}$

$=\cos(180^\circ-60^\circ)-\frac{1}{2}$

$=-\cos 60^\circ-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$.

(2)原式$=\sin\left(-4\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{6}$

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【应用迁移】

解:(1)原式$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{55\pi}{6}+\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}+\cos\left(4\times2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}$

$=-1+\cos\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}=-1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$

$=-\frac{3}{2}-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式$=\cos 120^\circ(-\sin 150^\circ)+\tan 855^\circ$

$=-\cos(180^\circ-60^\circ)\sin(180^\circ-30^\circ)+\tan(135^\circ+2\times360^\circ)$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\tan 135^\circ$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\tan(180^\circ-45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ-\tan 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{4}$.

(3)原式$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(4\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\tan\frac{5\pi}{4}$

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{4}$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times1=\frac{3}{4}$.

任务2

【探究活动】

例2 **解:**(1)原式$=\frac{\sqrt{\sin^2 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\cos^2 10^\circ}}{\sin 170^\circ-|\cos 170^\circ|}$

$=\frac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}{\sin(180^\circ-10^\circ)-|\cos(180^\circ-10^\circ)|}$

$=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=-1$.

(2)$\frac{\sin(180^\circ+\alpha)-\cos(-\alpha)}{-\sin(-\alpha)-2\cos(180^\circ-\alpha)-\cos(-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-1$.

【应用迁移】

解:(1)原式$=\frac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1$.

(2)原式$=\frac{\sin(4\times360^\circ+\alpha)\cos(\alpha-3\times360^\circ)}{\cos(180^\circ+\alpha)[-\sin(180^\circ+\alpha)]}$

$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-1$.

任务3

【探究活动】

例3 (1)$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **解析:**$\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=$

$-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)**解:**因为 $\sin(\alpha+\pi)=\frac{4}{5}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

又因为 $\sin\alpha\cos\alpha<0$,

所以 $\cos\alpha>0$，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$，

则 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

所以原式$=\frac{-2\sin\alpha-3\tan\alpha}{-4\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha+3\tan\alpha}{4\cos\alpha}$

$=\frac{2\times\left(-\frac{4}{5}\right)+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{4\times\frac{3}{5}}=-\frac{7}{3}$.

[一题多思]

思考 1.提示：$\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

思考 2.提示：$\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{6}-\alpha\right)$

$=\cos\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

思考 3.提示：$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left[-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$.

思考 4.提示：$\tan\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)=\tan\left[\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【应用迁移】

1.$\frac{1}{3}$　解析：因为 $\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left[-\pi-\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$.

2.解：由已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，α 是第四象限角，得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故 $\frac{\sin(\alpha-2\pi)+\sin(-\alpha-3\pi)\cos(\alpha-3\pi)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos(-\pi-\alpha)\cos(\alpha-4\pi)}$

$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

第 2 课时　诱导公式五、六

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$\cos\alpha$　$\sin\alpha$　(2)$\cos\alpha$　$-\sin\alpha$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　2.D

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　(1)$-\cos\alpha$

解析：$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\tan(-\alpha-\pi)\sin(-\alpha-\pi)}$

$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(-\sin\alpha)\tan\alpha(-\sin\alpha)}{\sin(-\alpha)(-\tan\alpha)[-\sin(\pi+\alpha)]}$

$=\frac{-\cos\alpha(-\sin\alpha)\tan\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha(-\tan\alpha)\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)$\frac{1}{2}$　解析：$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

[一题多思]

思考 1.提示：$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$.

思考 2.提示：因为 α 是第三象限角，所以 $-\alpha$ 是第二象限角.又 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}-\alpha$ 是第二象限角，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【应用迁移】

1.B

2.解：(1)由 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=-2$.

故 $\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{-3\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{-3-\tan\alpha}=5$.

(2)由(1)知 $\tan\alpha=-2$，

则 $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

又 α 为第二象限角，则 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)+3\cos(\alpha-13\pi)=\cos\alpha-3\cos\alpha=-2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

任务 2

【探究活动】

例 2　证明：左边$=\frac{-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot(-\sin\theta)-1}{1-2\sin^2\theta}$

$$=\frac{2\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta},$$

$$右边=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}.$$

所以左边＝右边，故原式成立.

【应用迁移】

证明：左边$=\dfrac{-\sin(5\pi-\theta)\sin\theta\cos\theta}{\cos(\pi-\theta)\sin\theta[-\sin(4\pi+\theta)]}$

$=\dfrac{-\sin(\pi-\theta)\sin\theta\cos\theta}{-\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta}=-1=$右边，

故原式得证.

任务 3

【探究活动】

例 3 ABD **解析**：在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$.

对于 A，$\sin^2(A+B)+\cos^2C=\sin^2C+\cos^2C=1$，A 正确；

对于 B，因为$\dfrac{\pi-A}{4}+\dfrac{\pi+A}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\sin\dfrac{\pi-A}{4}=\cos\dfrac{\pi+A}{4}$，B 正确；

对于 C，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$，C 错误；

对于 D，$\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$，D 正确.

故选 ABD.

【应用迁移】

1.AD **解析**：因为$A+B=\pi-C$，所以$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，故 A 正确；

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$，故 B 错误；

因为$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，$\tan\dfrac{A+B}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$，故 C 错误；

因为$\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$，所以$\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)+\sin^2\dfrac{A}{2}=\cos^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}=1$，故 D 正确，故选 AD.

2.C

5.4 三角函数的图象与性质

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

问题式预习

【知识清单】

知识点一

正弦 波浪起伏

知识点二

(2)①(0,0) (π,0) (2π,0) ②向左、向右

知识点三

余弦 相同形状

知识点四

(1)左 $\dfrac{\pi}{2}$ $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)(0,1) $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ (π,−1) (2π,1)

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)× (4)× **2.**2

任务型课堂

任务 1

1.D **2.**D **3.**B

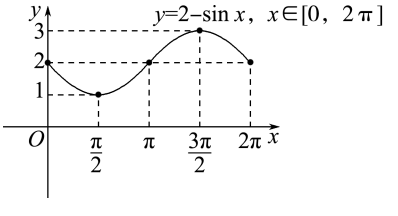
任务 2

【探究活动】

例 1 **解**：(1)由题知$y=2-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	2	1	2	3	2

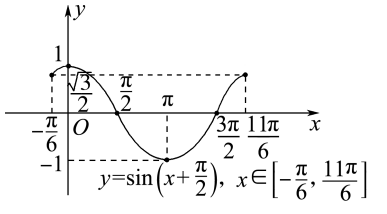
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：



(2)由题知$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right]$，列表如下：

x	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
y	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：



【应用迁移】

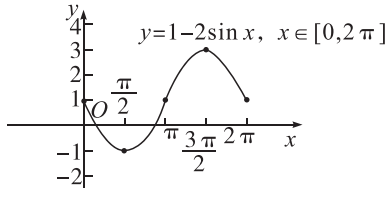
1.A **解析**：$y=2\sin x$ 与 $y=\sin x$ 对应五点的横坐标相

同，则五点法对应五点的横坐标为 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$.

2.解：(1)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1-2\sin x$	1	-1	1	3	1

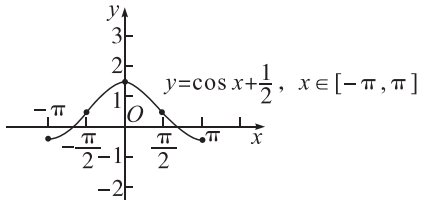
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：



(2)列表：

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1
$\cos x+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

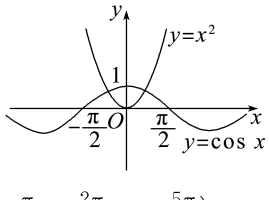
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：



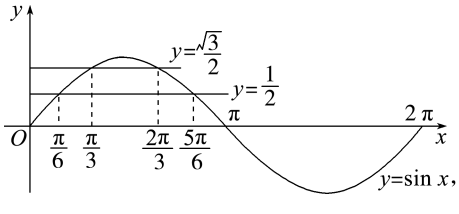
任务 3

【探究活动】

例 2 (1)2　0　**解析**：作出函数 $y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 的图象，如图所示.由图象可知，两个函数图象有两个交点，且两个交点关于 y 轴对称，故原方程有两个实数解，且两个实数解的和为 0.



(2)$\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3},\text{或}\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}\right\}$　**解析**：作出正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，作出直线 $y=\frac{1}{2}$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.

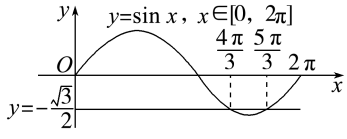


由图可知，在 $[0,2\pi]$ 上，当 $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}$ 时，不等式 $\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3},\text{或}\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}\right\}$.

[一题多思]

思考 1.提示：画出函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的简图，作出直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.



当 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$x=\frac{4\pi}{3}$ 或 $x=\frac{5\pi}{3}$.

由图可知，不等式 $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的解集是 $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$.

思考 2.提示：因为 $0\leqslant x\leqslant2\pi$，由余弦曲线(图略)，得 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

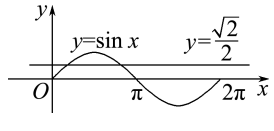
思考 3.提示：有变化.原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,\text{或}\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

【应用迁移】

1.C

2.B　**解析**：在 $[0,2\pi]$ 上，函数 $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}$ 的定义域满足 $2\sin x-\sqrt{2}\geqslant0$，

即 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.如图所示，结合图象，可得 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.



3.3

5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质

第 1 课时　正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1.(1)非零常数 T　$f(x+T)=f(x)$　非零常数 T

(2)最小的正数　最小正周期

2.$\sin x$　$\cos x$　周期

知识点二

(1)奇　原点　(2)偶　y 轴

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

2.A

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　解：(1)(方法一)令 $z=2x$，

则 $\cos 2x=\cos z=\cos(z+2\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos[2(x+\pi)]$，

由周期函数的定义可知，原函数的周期为 π.

(方法二)因为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $y=\cos 2x$ 的周期为 π.

(2)(方法一)令 $z=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}$，则 $3\sin z=3\sin(z+2\pi)=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=3\sin\left(\dfrac{x+4\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

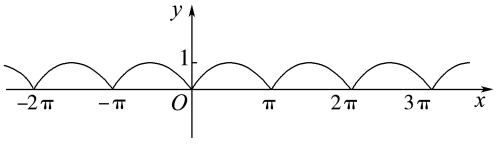
所以由周期函数的定义可知，原函数的周期为 4π.

(方法二)因为 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，

所以函数 $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的周期为 4π.

(3)$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\\ -\sin x, 2k\pi+\pi<x<2k\pi+2\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

其图象如图所示.



所以该函数的最小正周期为 π.

[一题多思]

思考 1.提示：周期函数的周期不唯一.若 T 是函数 $f(x)$ 的最小正周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.

思考 2.提示：是周期函数.最小正周期与 ω 有关，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

思考 3.提示：因为函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π，且函数 $y=\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 的图象是将函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 x 轴下方的部分对折到 x 轴上方，并且保留 x 轴上方的图象而得到的，由此可知，所求函数的最小正周期为 $T=\dfrac{\pi}{2}$.

【应用迁移】

1.$-\sqrt{3}$　解析：因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi\omega$，则 $\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\omega$，结合 $\omega>0$ 可得 $\omega=1$，

则 $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，得 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

2.$\dfrac{\pi}{2}$

任务 2

【探究活动】

例 2　解：(1)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=|\sin(-x)|+\cos(-x)=|\sin x|+\cos x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)=\cos x-x^3\cdot\sin x$，

所以 $f(-x)=\cos(-x)-(-x)^3\cdot\sin(-x)=\cos x-x^3\cdot\sin x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-x^2\sin x$，

所以 $f(-x)=-(-x)^2\sin(-x)=x^2\sin x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(-x)=\sin[\cos(-x)]=\sin(\cos x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

【应用迁移】

1.A　解析：令 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\sin x\right)=\cos(\sin x)$，$x\in\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=\cos(\sin(-x))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是偶函数.故选 A.

2.C

任务 3

【探究活动】

例 3　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　解析：由题意知 $f(x)=f(x-\pi)$，且 $f(x)=f(-x)$，所以 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[一题多思]

思考 1.提示：$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

思考 2.提示：因为 $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-f(x)$，所以 $f(x+\pi)=-f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.

又 $f(x)$ 是偶函数，因此 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

【应用迁移】

C

第2课时　正弦函数、余弦函数的单调性与最值

问题式预习

【知识清单】

知识点

$[-1,1]$　递增　递减　递增　递减　-1　1　-1　1

$\frac{\pi}{2}+k\pi$　$k\pi$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√　**2.**C

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1　**解**：由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

[一题多思]

思考1.提示：$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $z=x-\frac{\pi}{3}$，又 $y=-\sin z$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

所以令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

思考2.提示：由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$. 又 $x\in[0,2\pi]$，所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

所以函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$.

【应用迁移】

1.B　**解析**：令 $2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $4k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{5\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{\pi}{2},4k\pi+\frac{5\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$.

2.$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

任务2

【探究活动】

例2　**解**：(1)$\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)=\sin\left(-6\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\sin\frac{49}{3}\pi=\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)<\sin\frac{49}{3}\pi$.

(2)$\cos 870^\circ=\cos(720^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$，

$\sin 980^\circ=\sin(720^\circ+260^\circ)=\sin 260^\circ=\sin(90^\circ+170^\circ)=\cos 170^\circ$.

因为 $0^\circ<150^\circ<170^\circ<180^\circ$，且 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，

所以 $\cos 150^\circ>\cos 170^\circ$，即 $\cos 870^\circ>\sin 980^\circ$.

例3　**解**：由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\omega>0$，

得 $-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right],k\in\mathbf{Z}$.

根据题意，得 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right],k\in\mathbf{Z}$，

从而有 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant-\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4},\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$　解得 $\begin{cases}\omega\leqslant\frac{3}{2}-6k,\\ \omega\leqslant 2+8k,\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

令 $k=0$，得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

故 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

【应用迁移】

1.D　**解析**：对于A，$\sin 400^\circ=\sin 40^\circ<\sin 50^\circ$，故A错误；

对于B，$\sin 220^\circ=\sin(180^\circ+40^\circ)=-\sin 40^\circ$，$\sin 310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=-\sin 50^\circ$，

因为 $\sin 40^\circ<\sin 50^\circ$，则 $-\sin 40^\circ>-\sin 50^\circ$，即 $\sin 220^\circ>\sin 310^\circ$，故 B 错误；

对于 C，$\sin\frac{31\pi}{5}=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{11\pi}{3}=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 $\sin\frac{31\pi}{5}>\cos\frac{11\pi}{3}$，故 C 错误；

对于 D，$\cos\frac{35\pi}{12}=\cos\left(2\pi+\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\sin\frac{5\pi}{12}=-\sin\frac{7\pi}{12}$，

$\sin\frac{97\pi}{13}=\sin\left(8\pi-\frac{7\pi}{13}\right)=-\sin\frac{7\pi}{13}$，

因为 $\sin\frac{7\pi}{13}>\sin\frac{7\pi}{12}$，则 $-\sin\frac{7\pi}{13}<-\sin\frac{7\pi}{12}$，即 $\cos\frac{35\pi}{12}>\sin\frac{97\pi}{13}$，故 D 正确.

2.B

任务 3

【探究活动】

例 4 **解**：(1)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

故 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 1 和 $-\frac{1}{2}$.

(2)$y=-2(1-\sin^2 x)+2\sin x+3=2\sin^2 x+2\sin x+1=2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$.

当 $\sin x=1$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=5$；

当 $\sin x=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$y_{\min}=\frac{5}{2}$.

【应用迁移】

1.C **解析**：因为 $\sqrt{1+x^2}>|x|\geqslant -x$，所以 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 $[-2\,025,2\,025]$ 上恒有意义，

且 $f(x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\lg(-x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x+\sin(-2x)+8$

$=\lg 1+8=8$.

令 $g(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x$，则 $g(x)+g(-x)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $[-2\,025,2\,025]$ 上的图象关于原点对称.

所以函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x+4$ 在 $[-2\,025,2\,025]$ 上的最大值和最小值之和为 8.

2.$\left[3,\frac{25}{8}\right]$

5.4.3 正切函数的性质与图象

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ **R** 奇

$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$ $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ (4)× **2.**D

任务型课堂

任务 1

1.$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$ **解析**：由 $x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2.$[-\sqrt{3},0]$

3. **解**：因为 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，

所以 $-1\leqslant\tan x\leqslant 1$.

令 $t=\tan x$，则 $t\in[-1,1]$，

所以 $y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$.

所以，当 $t=-1$，

即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\min}=-4$；

当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=4$.

故所求函数的值域为 $[-4,4]$.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)C **解析**：$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)D **解析**：$\tan 114^\circ=\tan(180^\circ-66^\circ)=\tan(-66^\circ)$，

因为函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $-66^\circ<-22^\circ<48^\circ$，

所以 $\tan(-66^\circ)<\tan(-22^\circ)<\tan 48^\circ$，

即 $\tan 48^\circ>\tan(-22^\circ)>\tan 114^\circ$.

故选 D.

【应用迁移】

1.C **2.**C

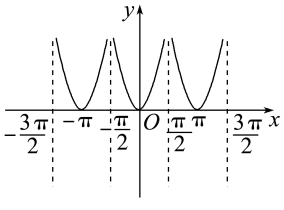
任务 3

【探究活动】

例 2 BCD **解析**：由 $y=|\tan x|$，

得 $y=\begin{cases}\tan x, k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

其图象如图所示.



由图象可知，函数 $y=|\tan x|$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $[0,+\infty)$，是偶函数.

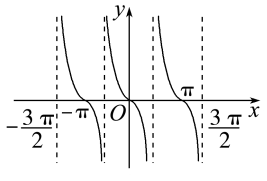
函数 $y=|\tan x|$ 的周期 $T=\pi$，

函数 $y=|\tan x|$ 的单调递增区间为 $\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$，

单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$.

[一题多思]

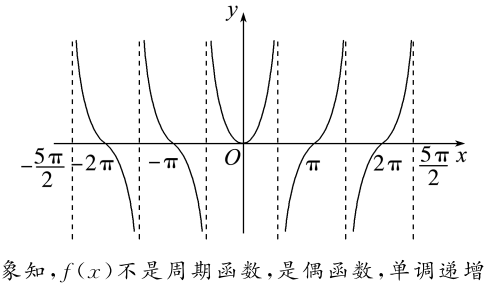
思考 1.提示：$y=\tan(-x)=-\tan x$，其图象如图所示，与函数 $y=\tan x$ 的图象关于 y 轴对称.



思考 2.提示：$f(x)=\tan|x|$ 可化为

$f(x)=\begin{cases}\tan x, x\geqslant 0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, x<0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

根据 $y=\tan x$ 的图象，作出 $f(x)=\tan|x|$ 的图象如图所示.



由图象知，$f(x)$ 不是周期函数，是偶函数，单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right), \left(k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{3\pi}{2}\right), k\in\mathbf{N}$.

【应用迁移】

解：(1)由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\middle|x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

因为 $\omega=\frac{1}{2}$，所以最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi,0\right), k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $-1\leqslant\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，

得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

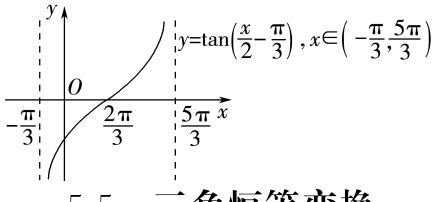
所以不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集是 $\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3)令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=0$，则 $x=\frac{2\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，则 $x=\frac{5\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，则 $x=-\frac{\pi}{3}$.

所以函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 x 轴的一个交点坐标是 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，在这个交点左、右两侧相邻的两条渐近线方程分别是 $x=-\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$.从而得到函数 $y=f(x)$ 在一个周期 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 内的简图(如图).



5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

第 1 课时 两角差的余弦公式

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)√ **2.**C

任务型课堂

任务 1

(1)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)$-\frac{1}{2}$　**解析**：原式$=-\sin 100^\circ\sin 160^\circ+\cos 200^\circ\cos 280^\circ$

$=-\sin 100^\circ\sin 20^\circ-\cos 20^\circ\cos 80^\circ$

$=-(\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ)$

$=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$.

(5)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**：(1)因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\frac{\pi}{3}+\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

因为$\alpha=\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}$，所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{5}{13}\times\frac{1}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$.

(2)因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$.

[一题多思]

思考 1.提示：因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\pi$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$

$+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

思考 2.提示：(1)已知条件中只有一个角，一般用该角与特殊角凑成所求角；(2)已知条件中有两个角，一般利用这两个角凑成所求角；(3)不能直接拼凑时，一般考虑用诱导公式转换.

【应用迁移】

1.D

2.解：因为$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

3.解：因为$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$0<\alpha+\beta<\pi$.

由$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$，得$\sin(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$.

又$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

所以$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{4}{5}=\frac{204}{325}$.

任务 3

【探究活动】

例 2　$\frac{3\pi}{4}$　**解析**：因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\alpha<\beta$，所以

$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

又$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又因为$0<2\alpha<\pi$，$\cos2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以$\sin2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以$\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin2\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$0<\alpha+\beta<\pi$，故$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

【应用迁移】

解：因为$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，

所以$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.因为$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$.

所以 $\cos 2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-1$.

因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，

所以 $\frac{\pi}{2}<2\beta<\frac{3\pi}{2}$，$2\beta=\pi$，所以 $\beta=\frac{\pi}{2}$.

第 2 课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　$C_{(\alpha+\beta)}$　任意角

知识点二

(1)$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　(2)$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

知识点三

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　**2.**A

任务型课堂

任务 1

1.BC　**解析**：$\cos(-15°)=\cos(30°-45°)=\cos 30°\cos 45°+\sin 30°\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，A 错误；

因为 $\sin 75°=\sin(180-105°)=\sin 105°$，

所以 $\cos 15°\cos 105°+\sin 15°\sin 75°=\cos 15°\cos 105°+\sin 15°\sin 105°=\cos(15°-105°)=\cos(-90°)=\cos 90°=0$，B 正确；

因为 $\sin 166°=\sin(90°+76°)=\cos 76°$，$\cos 74°=\cos(90°-16°)=\sin 16°$，

所以 $\sin 166°\cos 16°+\sin 76°\cos 74°=\cos 76°\cos 16°+\sin 76°\sin 16°=\cos 60°=\frac{1}{2}$，C 正确；

$\cos(\alpha-35°)\cos(25°+\alpha)+\sin(\alpha-35°)\sin(25°+\alpha)=\cos(-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$，D 错误.

2.$\sqrt{3}$

3.解：(1)原式 $=\frac{\tan 45°-\tan 15°}{1+\tan 45°\tan 15°}=\tan(45°-15°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)原式 $=\tan 60°(1-\tan 23°\tan 37°)+\sqrt{3}\tan 23°\cdot\tan 37°=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°=\sqrt{3}$.

[一题多思]

思考 1. 提示：原式 $=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\tan 45°-\tan 15°}{1+\tan 45°\tan 15°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(45°-15°)=\frac{\tan 30°}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

思考 2. 提示：原式 $=1+(\tan 18°+\tan 27°)+\tan 18°\cdot\tan 27°=1+\tan 45°(1-\tan 18°\tan 27°)+\tan 18°\tan 27°=1+1=2$.

思考 3. 提示：(1)“1”的代换：在 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 中，如果分子中出现“1”，常利用 $1=\tan\frac{\pi}{4}$ 来代换，以达到化简求值的目的，如 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\frac{\sqrt{3}\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}\cdot\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)整体意识：若化简的式子中出现了“$\tan\alpha\pm\tan\beta$”及“$\tan\alpha\tan\beta$”两个整体，常考虑 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 的变形公式.

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)C　**解析**：$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{22}$.

(2)**解**：因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\alpha<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\beta<0$.

又因为 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{12}{13}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=-\frac{4}{5}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]$

$=\sin\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{33}{65}$.

【应用迁移】

1.A　**解析**：因为 $\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$，

$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=1$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

2.解：(1)因为$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\pi$，

所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{4}{5}$.

因为$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，

所以$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)}=-\frac{12}{13}$.

所以$\sin(\alpha+\beta)=-\sin(\pi+\alpha+\beta)$

$=-\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=-\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=-\left[\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}\right]=\frac{63}{65}$.

(2)由(1)可知，$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{12}{13}$，

所以$\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$.

又因为$\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]=\sin\left[(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\right]$

$=-\cos(\alpha-\beta)$，

从而$\cos(\alpha-\beta)=\frac{33}{65}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)>0$.又因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{13}{14}\times\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{7}$，

则$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

因为$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以$\sin(\alpha+\beta)>0$.

又因为$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以$\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\beta=\frac{\pi}{3}$.

【应用迁移】

解：因为$\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta-\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$.

又因为$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$.

第 3 课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$2\sin\alpha\cos\alpha$　(2)$1-2\sin^2\alpha$

知识点二

(1)$\cos\alpha$　$\sin\alpha$　(2)$1\pm\sin 2\alpha$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)×　**2.**$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

任务型课堂

任务 1

解：(1)原式$=\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha$.

(2)原式$=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{8}$.

(3)原式$=\cos(2\times750°)=\cos1500°$

$=\cos(4\times360°+60°)=\cos60°=\frac{1}{2}$.

(4)原式$=\frac{2\tan^2150°+1-3\tan^2150°}{2\tan150°}$

$=\frac{1-\tan^2150°}{2\tan150°}=\frac{1}{\tan(2\times150°)}$

$=\frac{1}{\tan300°}=\frac{1}{\tan(360°-60°)}=-\frac{1}{\tan60°}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)$-\frac{7}{9}$ **解析**：$\sin 2\theta=-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\left[1-2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1=-\frac{7}{9}$.

(2)**解**：因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，所以 $\frac{\pi}{4}-x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

利用诱导公式，得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

所以原式$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{24}{13}$.

[一题多思]

思考 1.提示：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{24}{25}$.

思考 2.提示：$\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169}$.

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\frac{\pi}{4}-x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

又因为 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，所以原式$=\frac{\frac{119}{169}}{\frac{12}{13}}=\frac{119}{156}$.

思考 3.提示：因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$，所以 $0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$.

由 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{3}{4}$，

得$\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{3}{4}$，故 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{4}{5}$，

$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{8}{5}$.

【应用迁移】

解：由 $\tan\alpha=2\tan\beta$ 可得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，

由 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4},\end{cases}$

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

因此 $\cos(2\alpha-2\beta)=1-2\sin^2(\alpha-\beta)=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

任务 3

【探究活动】

例 2 **解**：(1)原式$=\frac{1+\tan\theta-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$.

(2)原式$=$

$$\frac{\sin 2\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

例 3 **证明**：原式等价于 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$，

即 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\tan 2\theta(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$①.

而①式右边$=\tan 2\theta(1+\cos 4\theta+\sin 4\theta)$

$=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}(2\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta)$

$=\sin 4\theta+1-\cos 4\theta=$左边，

所以①式成立，原式得证.

【应用迁移】

1.证明：原式左端$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}=$右端，

所以原等式成立.

2.解：(1)$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$

$=1-\frac{1}{2}\sin 30^\circ=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)三角恒等式为 $\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}$.

(方法一)$\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

(方法二)$\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)$

$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}-\sin\alpha(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 60^\circ\cos 2\alpha+\sin 60^\circ\cdot\sin 2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)$

$=1-\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha=\frac{3}{4}$.

5.5.2 简单的三角恒等变换

第1课时 半角公式及其应用

问题式预习

【知识清单】

知识点二

$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$　$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　**2.**A

任务型课堂

任务1

1.D　**解析:**$\alpha\in(\pi,2\pi)$,故$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,故$\cos\frac{\alpha}{2}<0$,

所以$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{9}}{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.解:因为α为钝角,β为锐角,且$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin\beta=\frac{12}{13}$,

所以$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\beta=\frac{5}{13}$,

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$.

又因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以$0<\alpha-\beta<\pi$,

所以$0<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$,

所以$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{33}{65}}{2}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

任务2

【探究活动】

例1　D　**解析:**因为$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)$

$=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|+\frac{1}{\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|}=$

$\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

【应用迁移】

1.C

2.解:原式$=\frac{\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\times2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$.

因为$-\pi<\alpha<0$,所以$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<0$,所以$\sin\frac{\alpha}{2}<0$,

所以原式$=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{-\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

任务3

【探究活动】

例2　**证明:**左边$=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}$

$=\dfrac{2\sin x}{\cos 2x+\cos x}=$右边.

所以原等式成立.

[一题多思]

思考 1.提示:(1)执因索果法:证明的形式一般是化繁为简.

(2)左右归一法:证明左右两边都等于同一个式子.

(3)比较法:设法证明"左边－右边＝0"或"$\dfrac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$".

(4)分析法:从被证明的等式出发,逐步地探求使等式成立的条件,直到已知条件或明显的事实为止,就可以断定原等式成立.

思考 2.提示:成立.$\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{2\sin 2x\cos 2x}{2\cos^2 2x}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$.

思考 3.提示:成立.$\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

【应用迁移】

1.证明:因为 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$,所以$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$,

所以 $\cos\dfrac{\alpha}{2}<0,\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$,

所以原式$=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\dfrac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$=-\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

2.证明:$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

第 2 课时　三角恒等变换的综合应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

【概念辨析】

1.AD　**2.**B

任务型课堂

任务 1

1.2

2.解:(1)$f(x)=2\sin x(\cos x-\sin x)+1$

$=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$,

所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$.

又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$,

所以 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{5}$,

所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

[一题多思]

思考 1.提示:作用是把三角函数式化为一个角的三角函数,从而可以更方便地研究三角函数的图象和性质.

思考 2.提示:由已知,得 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

所以函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减，在区间

$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，

且 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

所以函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，最小值为$-\frac{1}{2}$.

任务 2

【探究活动】

例 1　(1)**解**：原式$=\frac{\sin 2\theta+(1-\cos 2\theta)}{\sin 2\theta+(1+\cos 2\theta)}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$.

(2)**解**：$\frac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ\left(\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$

$=\frac{2\sin(10^\circ+30^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$，

又 $\sin 40^\circ-\sin 50^\circ=\sin(45^\circ-5^\circ)-\sin(45^\circ+5^\circ)$

$=-2\cos 45^\circ\sin 5^\circ=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5^\circ=-\sqrt{2}\sin 5^\circ$，

故$\frac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}=$

$\frac{-2\sqrt{2}\sin 5^\circ}{\sin 5^\circ}=-2\sqrt{2}$.

(3)**证明**：$\frac{(1+\cos 2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$=2\cos^2\alpha\cdot(-\cos 2\alpha)\cdot\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$=\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$=\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\tan\alpha$

$=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

所以原式成立.

【应用迁移】

C

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**：(1)在 Rt△CHE 中，因为 $CH=50$，$C=90^\circ$，$\angle CHE=x$，所以 $HE=\frac{50}{\cos x}$.

在 Rt△HDF 中，$HD=50$，$D=90^\circ$，$\angle DFH=x$，所以 $HF=\frac{50}{\sin x}$.

又$\angle EHF=90^\circ$，所以 $EF=\frac{50}{\sin x\cos x}$.

所以三条路的总长(即△HEF 的周长)L 关于 x 的函数解析式为 $L=\frac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$.

当点 F 与点 A 重合时，角 x 最小，求得此时 $x=\frac{\pi}{6}$；

当点 E 与点 B 重合时，角 x 最大，求得此时 $x=\frac{\pi}{3}$.

故此函数的定义域为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

(2)由题意知，要求最低铺路总费用，只要求出△HEF 的周长 L 的最小值即可.

由(1)得 $L=\frac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

设 $\sin x+\cos x=t$，则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

所以 $L=\frac{50(t+1)}{\frac{t^2-1}{2}}=\frac{100}{t-1}$.

由 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，得$\frac{\sqrt{3}+1}{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

从而$\sqrt{2}+1\leqslant\frac{1}{t-1}\leqslant\sqrt{3}+1$.

所以当 $x=\frac{\pi}{4}$，即 $CE=50$ m 时，$L_{\min}=100(\sqrt{2}+1)$ m.

此时，铺路总费用最低，为 $400\times100(\sqrt{2}+1)\approx96\,560$(元).

所以，当 $CE=DF=50$ m 时，铺路总费用最低，最低总费用为 96 560 元.

【应用迁移】

解：(1)由已知得$\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\angle QOP\times2^2$，解得$\angle QOP=\frac{\pi}{3}$，

则弧$\overset{\frown}{PQ}$的长为$\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$.

(2)在 Rt△OBC 中，$OB=2\cos\alpha$，$BC=2\sin\alpha$，

在 Rt△OAD 中，$\frac{DA}{OA}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

所以 $OA=\frac{\sqrt{3}}{3}DA=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，$AB=OB-OA=$

$2\cos\alpha-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$.

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S，

则 $S=AB\cdot BC=\left(2\cos\alpha-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\cdot 2\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2\sin^2\alpha=2\sin 2\alpha-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times(1-\cos 2\alpha)=2\sin 2\alpha+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 2\alpha-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，得 $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积最大，最大面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

第1课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)左 右 (2)$y=\sin(\omega x+\varphi)$ (3)$y=A\sin(\omega x+\varphi)$

知识点二

$y=\sin(x+\varphi)$ $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)× (4)√ **2.**3

任务型课堂

任务 1

1.B

[一题多思]

思考 1.提示：函数 $y=\sin x$ 的图象，可以看作由 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到.

思考 2.提示：因为 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left[-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$，故 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的图象是由 $y=\sin(-x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的.

思考 3.提示：因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，故只需将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可得到 $y=\cos x$ 的图象.

2.B **解析**：将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

故选 B.

3.A **解析**：因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

任务 2

1.B **解析**：把函数 $y=\cos\frac{x}{4}$ 图象上所有的点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，得到函数 $y=\cos x$ 的图象.

2.B **解析**：将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象；

再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，可得 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象.

3.A

4.A **解析**：所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，则 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{7}\right)$.故选 A.

任务 3

【探究活动】

例 (1) C **解析**：$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin 2x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长到原来的 2 倍}}y=\sin x$ 的图象.

(2)**解**：$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标伸长到原来的}\frac{3}{2}\text{倍}}y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos x$ 的图象.

所以 $f(x)=3\cos x$.

【应用迁移】

1.C **解析**：对于 A，先将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度，得到 $y=\cos\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)$ 的图象，

再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，

得到 $y=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$的图象，故A错误；

对于B，先将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，

再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，得到$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，故B错误；

对于C，先将$f(x)$图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，得到$y=\cos 2x$的图象，

再将图象向左平移$\frac{7\pi}{8}$个单位长度，得到$y=\cos\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，故C正确；

对于D，先将$f(x)$图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，得到$y=\cos 2x$的图象，

再将图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$的图象，故D错误.故选C.

2.解：(方法一)$y=\sin x$的图象$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位长度}}$

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的3倍}}$

$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

(方法二)$y=\sin x$的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin 2x$的图象$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$

$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的3倍}}$

$y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

第2课时　函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质

问题式预习

【知识清单】

知识点一

A　0

知识点二

$[-A,A]$　奇　偶

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×　**2.**D

任务型课堂

任务1

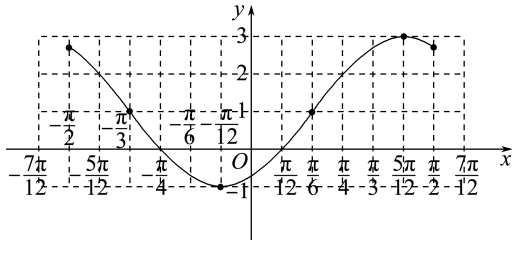
【探究活动】

例1　**解**：(1)$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$\sqrt{3}+1$	1	-1	1	3	$\sqrt{3}+1$

函数$f(x)$的图象如图所示.



令$2x-\frac{\pi}{3}=0+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以$y=f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},1\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{7\pi}{12}$个单位长度，

得到函数$y=2\sin\left[2\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]+1=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$，

再向下平移1个单位长度，得到函数$y=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

然后再将各点的横坐标伸长到原来的2倍得到函数$g(x)=2\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

因为函数$g(x)$的图象经过点$\left(\theta,\frac{8}{5}\right)$，

所以$2\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{8}{5}$，

即$\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

因为$\theta\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\theta+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

因为$\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}>0$，所以$\theta+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)}=-\frac{3}{5}$，

所以$\sin\theta=\sin\left[\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{5\pi}{6}\right]=\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)\cos\frac{5\pi}{6}-$

$\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{2}$

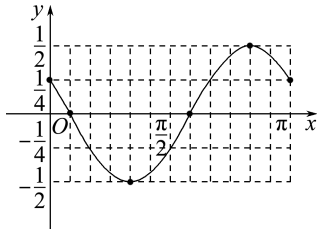
$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

【应用迁移】

解：(1)列表：

$2x+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

描点、连线，如图所示：



(2)把 $f(x)$ 的图象先向下平移 1 个单位长度，得 $y=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象；再将图象上各点的横坐标伸长为原来的4 倍(纵坐标不变)，得 $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象；最后将曲线向左平移 π 个单位长度，得 $g(x)=\frac{1}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right]-1=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象.

令 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},-1\right)(k\in\mathbf{Z})$.

任务 2

【探究活动】

例 2　解：(方法一)由题图可知 $A=3$，

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

所以 $y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在函数图象上，

所以 $0=3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)$.

所以 $-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法二)由题图知 $A=3$.

因为图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，

所以 $\begin{cases}\frac{5\pi\omega}{6}+\varphi=2\pi,\\ \frac{\pi\omega}{3}+\varphi=\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{3},\\ \omega=2.\end{cases}$

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法三)由题图可得 $A=3$，$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$. 点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在函数图象上，可知函数图象可由 $y=3\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到，故所求函数为 $y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

[一题多思]

思考 1.提示：由题图可知 $A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$，$\omega=2$，$y=\sin(2x+\varphi)$.

又当 $x=\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

思考 2.提示：由题图可知 $A=2$，$T=2\times\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$，所以 $\omega=2$，故 $y=2\sin(2x+\varphi)$. 由函数图象经过点 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$，得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 所以函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

【应用迁移】

A　**解析**：由图象可知 $A=2$，$\frac{3T}{4}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，

故 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，

由图象 $f(x)$ 过点 $\left(\frac{5\pi}{12},2\right)$，所以 $2\cos\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2$，即 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

由于 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

任务 3

【探究活动】

例 3　解：(1)因为 $f(x)$ 的图象过点 $B(0,1)$，所以 $2\sin\varphi=1$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

又 $f(x)$ 的图象过点 $A\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，所以 $2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，

所以 $\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\omega=1+\frac{12k}{5},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $\frac{T}{4}<\frac{5\pi}{6}<\frac{T}{2}$，所以 $\frac{3}{5}<\omega<\frac{6}{5}$，

所以 $\omega=1$.

所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)函数 $f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5}{12}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11}{12}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{11}{12}\pi+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $k=0$，$x\in\left[\frac{5}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi\right]$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi\right]$.

【应用迁移】

1.解：(1)由题图可得 $\begin{cases}A+B=1,\\-A+B=-3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}A=2,\\B=-1,\end{cases}$

所以 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)-1$.

由题图可得 $\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，可得 $\omega=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)-1$.

又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$，所以 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)-1=1$，所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的图象的对称轴的方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由题意可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-1+1=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$g(x)\in[1,2]$.

若关于 x 的方程 $g(x)+2a-1=0$ 有实数根，

则 $1-2a=g(x)$ 有实数根，

所以 $1\leqslant 1-2a\leqslant 2$，可得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

2.解：(1)$f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+2\sqrt{3}\cos^2\omega x-\sqrt{3}=\sin 2\omega x+\sqrt{3}\cos 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，

则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

则 $-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=1-3k,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\omega\leqslant 3$，则当 $k=0$ 时，$\omega=1$.

(2)由(1)可知，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$；

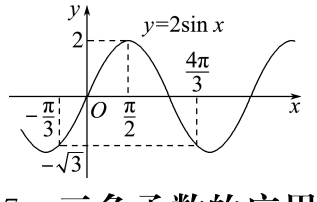
(3)$x\in\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3}\right]$，

因为 $2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，结合函数 $y=2\sin x$ 的图象可知，

欲使 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的值域是 $[-\sqrt{3},2]$，

则 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，即 $\frac{\pi}{12}\leqslant m\leqslant\frac{\pi}{2}$，

故 m 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.



5.7 三角函数的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

A　$T=\frac{2\pi}{\omega}$　$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√ 2.B

任务型课堂

任务 1

1.AB 解析:由题可知小球运动的周期 $T=2$ s,又 $\omega>0$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=2$,解得 $\omega=\pi$,

当 $t=0$ s 时,$A\sin\varphi=-A$,即 $\sin\varphi=-1$,$|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,

则 $h(t)=A\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-A\cos\pi t$,故 A 正确;

因为 $h(9)=-A\cos 9\pi=A$,$h\left(\frac{5}{3}\right)=-A\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2}A$,

所以 $t=9$ s 与 $t=\frac{5}{3}$ s 时小球偏离于平衡位置的距离之比为 $\frac{A}{\left|-\frac{1}{2}A\right|}=2$,故 B 正确;

若 $0<t<t_0$,则 $0<\pi t<\pi t_0$,又当 $0<t<t_0$ 时,小球有且只有三次到达最高点,

所以 $5\pi<\pi t_0\leqslant 7\pi$,解得 $5<t_0\leqslant 7$,即 $t_0\in(5,7]$,故 C 错误;

因为 $h(t)=-A\cos\pi t$,令 $t_1=\frac{1}{4}$,$t_2=\frac{3}{4}$,

则 $h(t_1)=-A\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}A$,$h(t_2)=-A\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$,

满足 $0<t_1<t_2<2$ 且 t_1,t_2 时刻小球偏离于平衡位置的距离相同,

此时 $\sin\left(\frac{\pi}{t_1+t_2}\right)=\sin\pi=0$,故 D 错误.

2.解:(1)由题图知 $A=300$,设 $t_1=-\frac{1}{900}$,$t_2=\frac{1}{180}$,则周期 $T=2\times(t_2-t_1)=2\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{75}$(s).

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=150\pi$.又当 $t=\frac{1}{180}$ 时,$I=0$,

即 $\sin\left(150\pi\times\frac{1}{180}+\varphi\right)=0$,而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故所求的解析式为 $I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)依题意,周期 $T\leqslant\frac{1}{150}$,即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}(\omega>0)$,

所以 $\omega\geqslant 300\pi>942$.

又 $\omega\in\mathbf{N}^*$,故所求 ω 的最小正整数值为 943.

任务 2

【探究活动】

例 1 解:(1)因为 $f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$,$t\in[0,24]$,

所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{3}$,$-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

当 $t=2$ 时,$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

当 $t=14$ 时,$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

所以 $f(t)$ 在 $[0,24]$ 上的最大值为 12,最小值为 8.

故实验室这一天的最高温度为 12 ℃,最低温度为 8 ℃,最大温差为 4 ℃.

(2)依题意得,当 $f(t)>11$ 时实验室需要降温.

令 $10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)>11$,

即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant t\leqslant 24$,所以 $\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}$,

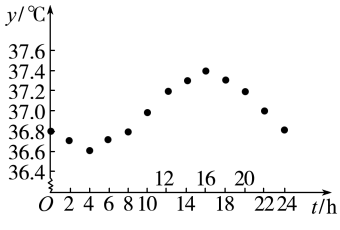
即 $10<t<18$.

故在 10 时至 18 时实验室需要降温.

[一题多思]

思考 1.提示:我们可以利用收集到的数据,首先画出相应的散点图,然后根据散点图进行函数拟合获得具体的函数模型,最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题.

思考 2.提示:散点图如图所示.



设 t 时的体温 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+c(A>0,\omega>0)$.

由题表知 $y_{\max}=37.4$,$y_{\min}=36.6$,则 $c=\frac{37.4+36.6}{2}=37$,

$A=\frac{37.4-36.6}{2}=0.4$,$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

所以 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)+37$.

由 $0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 16+\varphi\right)+37=37.4$,得 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$,

即 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.取 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$,

故可用函数 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+37$ 来近似描述这些数据.

【应用迁移】

解:(1)根据图象可知从 8~14 时的图象是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期的图象,$A=\frac{1}{2}\times(50-30)=10$,$b=\frac{1}{2}\times(50+30)=40$.

因为$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-8$，所以$\omega=\frac{\pi}{6}$，所以$y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+40$.

将$x=8$，$y=30$代入上式，得$30=10\sin\left(\frac{\pi}{6}\times8+\varphi\right)+40$，

所以$\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，即$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$.

又因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，因此$y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)+40$，$x\in[8,14]$.

(2)根据题意得$y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)+40\geqslant45$，

即$\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，

那么$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$12k\leqslant x\leqslant4+12k$，$k\in\mathbf{Z}$，

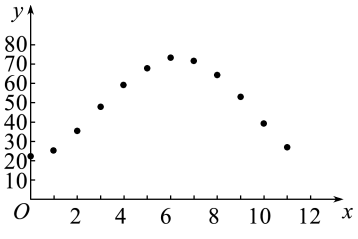
又因为$x\in[8,20]$，所以$x\in[12,16]$，

因此每日供能紧张的时间段为12～16时.

任务3

【探究活动】

例2 **解**：(1)如图.



(2)最低气温为1月份21.4 ℉，最高气温为7月份73.0 ℉，

故$\frac{T}{2}=7-1=6$，所以$T=12$.

因为$2A$的值等于最高气温与最低气温的差，

即$2A=73.0-21.4=51.6$，

所以$A=25.8$.

(3)因为$x=$月份-1，

所以不妨取$x=2-1=1$，$y=26.0$.

代入①，得$\frac{y}{A}=\frac{26.0}{25.8}>1\neq\cos\frac{\pi}{6}$，故①不适合；

代入②，得$\frac{y-46}{A}=\frac{26.0-46}{25.8}<0\neq\cos\frac{\pi}{6}$，故②不适合；

代入③，得$\frac{y-46}{-A}=\frac{26.0-46}{-25.8}>0$且$\frac{26.0-46}{-25.8}<1$，故③适合，所以应选③.

【应用迁移】

解：(1)根据数据，$\begin{cases}A+b=13,\\-A+b=7,\end{cases}$

所以$A=3$，$b=10$，$T=15-3=12$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，

所以函数的表达式为$y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由题意，水深$y\geqslant4.5+7$，

即$3\sin\frac{\pi}{6}t+10\geqslant11.5(0\leqslant t\leqslant24)$，

所以$\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k=0,1$，

所以$t\in[1,5]$或$t\in[13,17]$，

所以，该船在1:00至5:00或13:00至17:00能安全进港.若欲于当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过16 h.

微专题培优(四)　三角函数中参数ω的取值范围问题

类型1

例1 D　**解析**：根据题意可知若$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则可得$\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\right]$.

显然当$x=0$时，可得$2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

由$f(x)$的值域为$[-\sqrt{3},2]$，利用三角函数的图象与性质可得$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi$，

解得$\frac{5}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{10}{3}$，即$\omega$的取值范围是$\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$.

【对点训练】

C　**解析**：因为$0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，所以$\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{(3\omega+1)\pi}{6}$.由已知，$\frac{(3\omega+1)\pi}{6}>\frac{3}{2}\pi$，所以$\omega>\frac{8}{3}$，所以$\omega$的取值范围是$\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$.故选C.

类型2

例2 C　**解析**：由题意得$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，$\omega>0$，则$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]$，

则$\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=0$时，由$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$-\frac{3}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{4}$，又$\omega>0$，故$0<\omega\leqslant\frac{1}{4}$；

当$k=1$时，由$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{3\pi}{2},\\\pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{2},\end{cases}$得$\omega$无解，同理当$k\geqslant2$，$k\in\mathbf{Z}$时，$\omega$无解.

【对点训练】

$\left[2,\frac{5}{2}\right]$　**解析**：函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega},\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

又因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，可得 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega},\\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

解得 $6k+2\leqslant\omega\leqslant 3k+\frac{5}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又由 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，可得 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{3}$ 且 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant 3$，

令 $k=0$，可得 $2\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}$，所以实数 ω 的取值范围为 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

类型 3

例 3 3 **解析**：由题意知 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}\right)$，$g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，

因此 $\frac{\omega\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+3$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，$\omega x+\frac{\omega\pi}{6}\in\left(\frac{\omega\pi}{10}+\frac{\omega\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\omega\pi}{6}\right)$，

所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\omega\pi}{10}+\frac{\omega\pi}{6},\\ \frac{\omega\pi}{4}+\frac{\omega\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{15+60k}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{18+24k}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $\begin{cases}\frac{15+60k}{8}\leqslant 6k+3,\\ \frac{18+24k}{5}\geqslant 6k+3,\\ 6k+3>0,\end{cases}$ 所以 $-\frac{1}{2}<k\leqslant\frac{1}{2}$，即 $k=0$，$\omega=3$.

【对点训练】

$\frac{2}{3}$ **解析**：$f(x)=4\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-2=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sqrt{2}\cos\omega x$.

因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，所以 $\frac{3\pi}{4}\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}k(k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调，所以 $0<\frac{2\pi}{3}\omega\leqslant\pi$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

综上所述，当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$.

类型 4

例 4 C **解析**：因为函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 中的 $A=2$，则函数 $y=2$ 与 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象共有 3 个交点相当于 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上存在三个最大值点，所以令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}=\frac{2\pi+6k\pi}{3\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{4\pi}{3\omega}<0$，所以 $k=0,1,2$，即 $\begin{cases}\frac{14\pi}{3\omega}\leqslant 2\pi,\\ \frac{20\pi}{3\omega}>2\pi,\end{cases}$ 所以 $\frac{7}{3}\leqslant\omega<\frac{10}{3}$. 故选 C.

【对点训练】

$\frac{3}{2}$ **解析**：因为偶函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $f(x)=\cos\omega x$ 或 $f(x)=-\cos\omega x$.

又 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，

所以 $\cos\frac{\pi}{3}\omega=0$，即 $\frac{\pi}{3}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=3k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为函数在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi\omega}{4}\leqslant\pi$，即 $0<\omega\leqslant 4$，

所以当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{2}$ 符合条件.

素养评价参考答案

课后素养评价(一)

基础落实

1.B　**解析**:由集合的性质可知,B中所有偶数都是确定的,可以构成集合.

而A,C,D中研究对象都不确定,不能构成集合.故选B.

2.A　**解析**:因为集合$A=\{h,a,p,y\}$,所以集合A中的元素有4个.故选A.

3.C　**解析**:$0\in\mathbf{N}$,$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$,$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$,$\pi\notin\mathbf{Q}$,①②③正确,④错误.故选C.

4.$-\frac{1}{2}$或1

5.解:因为$5\in A$,所以$a^2+2a-3=5$,

解得$a=2$或$a=-4$.

当$a=2$时,$|a+3|=5$;

当$a=-4$时,$|a+3|=1$.

又$5\notin B$,所以$a=-4$.

能力提升

1.A　**2.**ACD

3.-1　**解析**:由已知可得$a\neq0$.因为两集合相等,且$1\neq0$,所以$\frac{b}{a}=0$,所以$b=0$,所以$a^2=1$,即$a=\pm1$.

当$a=1$时,集合A和集合B中的元素都不满足互异性,舍去;当$a=-1$时,A中的元素为$-1,0,1$,B中的元素为$1,-1,0$,满足题意.所以$a^{2\,025}+b^{2\,025}=-1$.

4.解:因为$2a\in A$且$3a\notin A$,所以$\begin{cases}2a<6,\\3a\geqslant6,\end{cases}$解得$2\leqslant a<3$.

又$a\in\mathbf{N}$,所以$a=2$.

自我超越

ABC　**解析**:对于A,假设$-1\in A$,则令$x=y=-1$,则$\frac{x}{y}=1\in A$,令$x=-1,y=1$,则$x+y=0\in A$,令$x=1,y=0$,不存在$\frac{x}{y}$,矛盾,所以$-1\notin A$,故选项A正确;

对于B,由题易知,$1\in A$,则$1+1=2\in A$,$2+1=3\in A$,…,$2\,025\in A$,$2\,026\in A$,所以$\frac{2\,025}{2\,026}\in A$,故选项B正确;

对于C,因为$1\in A$,$x\in A$,所以$\frac{1}{x}\in A$,因为$y\in A$,$\frac{1}{x}\in A$,所以$\frac{y}{\frac{1}{x}}=xy\in A$,故选项C正确;

对于D,因为$1\in A$,$2\in A$,若$x=1,y=2$,则$x-y=-1\notin A$,故选项D错误.故选ABC.

课后素养评价(二)

基础落实

1.C　**解析**:集合$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$中的所有元素是$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,故所有元素的和为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.故选C.

2.C

3.A　**解析**:因为$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$,所以$\sqrt{3}\in A$,$-2\notin A$,$0\in A$,$1\in A$.故选A.

4.AD

5.解:(1)被5除余3的正整数组成的集合是$\{x\mid x=5n+3,n\in\mathbf{N}\}$.

(2)正偶数组成的集合是$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(3)函数$y=2x^2-x+1$的图象上所有的点组成的集合是$\{(x,y)\mid y=2x^2-x+1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

能力提升

1.D

2.C　**解析**:对于A,(2,1)与(1,2)表示不同的点,则$M\neq P$,二者不是同一集合;

对于B,$M=\{2,-1\}$是数集,$P=\{(2,-1)\}$是点集,二者不是同一集合;

对于C,集合M表示大于或者等于-1的数,集合P也表示大于或者等于-1的数,

则$M=P$,二者是同一集合;

对于D,集合M表示二次函数$y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$中y的取值集合,为数集,而集合P是二次函数$y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$图象上所有点组成的集合,为点集,则$M\neq P$,二者不是同一集合.故选C.

3.A

4.解:(1)当$a=0$时,方程化为$-2x+2=0$,解得$x=1$,此时$M=\{1\}$,满足条件.

当$a\neq0$时,方程为一元二次方程,由题意得$\Delta=4-8a\geqslant0$,即$a\leqslant\frac{1}{2}$且$a\neq0$,此时方程有两个相等或两个不相等的实数根,满足条件.

综上,若集合M中至少有一个元素,则实数a的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(2)存在.假设存在实数a,使$M=\{1\}$,则$1\in M$,

所以$a-2+2=0$,即$a=0$.

当$a=0$时,方程变为$-2x+2=0$,解得$x=1$,

故方程$ax^2-2x+2=0$的根为1,即$M=\{1\}$.

所以存在实数$a=0$,使$M=\{1\}$.

自我超越

ABC

课后素养评价(三)

基础落实

1.C　**解析**:集合$\{a,b,c\}$的非空子集有$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,$\{a,b,c\}$,共有7个.故选C.

2.D　**解析**:集合$A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,1,2a\}$,因为$A=B$,所以$2a=2$,解得$a=1$.故选D.

3.A　**4.**AB

5.$\{(1,2)\}$,$\{(-3,4)\}$

6.解:(1)由题意可知$M=\{0,1\}$,所以其子集为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,真子集为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$.

(2)由题意可知$N=\{-1,0,1\}$,

所以其子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,0,1\}$,共$2^3=8$(个),

真子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共$2^3-1=7$(个),

非空真子集为$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共$2^3-2=6$(个).

(3)由(1)和(2)可猜想,含有n个元素的集合的子集个数为2^n,真子集个数为2^n-1,非空真子集个数为2^n-2.

能力提升

1.ABC

2.D　**解析**:当$a=0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,即$1\leqslant 0$,不成立,所以$B=\varnothing$,满足$B\subseteq A$;

当$a>0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,解得$x\leqslant -\frac{1}{a}$,即$B=\left\{x\middle|x\leqslant -\frac{1}{a}\right\}$,

要使得$B\subseteq A$,则满足$-\frac{1}{a}<-1$,解得$0<a<1$;

当$a<0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,解得$x\geqslant -\frac{1}{a}$,即$B=\left\{x\middle|x\geqslant -\frac{1}{a}\right\}$,

要使得$B\subseteq A$,则满足$-\frac{1}{a}\geqslant 3$,解得$-\frac{1}{3}\leqslant a<0$.

综上所述,$-\frac{1}{3}\leqslant a<1$.故选D.

3.$\left\{a\middle|a<\frac{3}{2},\text{或}\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{19}{4}\right\}$

4.解:(1)由题意得,方程$x^2+2x-a=0$有实数解,

所以$\Delta=2^2-4\times(-a)\geqslant 0$,得$a\geqslant -1$.

所以实数a的取值范围是$\{a|a\geqslant -1\}$.

(2)因为$N=\{x|x^2+x=0\}=\{0,-1\}$,且$M\subseteq N$,

所以当$M=\varnothing$时,$\Delta=2^2-4\times(-a)<0$,得$a<-1$,满足题意.

当$M\neq\varnothing$时,

①当$\Delta=0$时,$a=-1$,

此时$M=\{-1\}$,满足$M\subseteq N$,符合题意;

②当$\Delta>0$时,$a>-1$,M中有两个元素,

若$M\subseteq N$,则$M=N$,

从而$\begin{cases}-1+0=-2,\\(-1)\times 0=-a,\end{cases}$无解.

综上,实数a的取值范围为$\{a|a\leqslant -1\}$.

自我超越

C　**解析**:不妨设$(1,1,1,1)\in B$,由$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=0$,则$B$中最多包含$(1,1,-1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$,$(-1,-1,1,1)$6个元素,

又$(1,1,-1,-1)$,$(-1,-1,1,1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$三组元素不正交,

所以$(1,1,-1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$,$(-1,-1,1,1)$这6个元素中最多只有3个元素在集合B中,如$B=\{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1)\}$,

若$B\subseteq A$,且B中任意两个元素均正交,则B中元素个数最多是4.

课后素养评价(四)

基础落实

1.D　**解析**:由题意可知,集合$M=\{x|2x-1>5\}=\{x|x>3\}$,又因为$N=\{1,2,3\}$,所以$M\cap N=\varnothing$.故选D.

2.C

3.C　**解析**:依题意$-\sqrt{2}\in B$,$\sqrt{3}\in B$,$\sqrt{5}\in B$,$-3\notin B$,$3\notin B$,所以可得$A\cap B=\{-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$,则$A\cap B$的元素个数为3.故选C.

4.AB　**5.**$\{1,3\}$

6.解:(1)因为$A=\{x|x\geqslant 3\}$,$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 7\}$,

所以$A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$,$A\cup B=\{x|x\geqslant 1\}$.

(2)因为$C\cup A=A$,$A=\{x|x\geqslant 3\}$,$C=\{x|x\geqslant a-1\}$,

所以$C\subseteq A$,所以$a-1\geqslant 3$,即$a\geqslant 4$.

所以实数a的取值范围是$\{a|a\geqslant 4\}$.

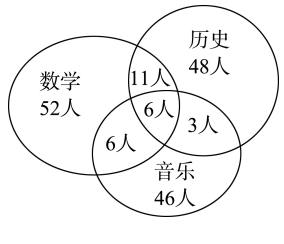
能力提升

1.C　**解析**:由$\begin{cases}x+y=0,\\2x-y=3,\end{cases}$解得$x=1$,$y=-1$,故$A\cap B=\{(1,-1)\}$.故选C.

2.C　**解析**:集合$A=\{x|x<-1\text{ 或 }x>0\}$,$B=\{x|m-1<x<m+2\}$,由$B\cup A=\mathbf{R}$,

得$\begin{cases}m-1<-1,\\m+2>0,\end{cases}$解得$-2<m<0$.故选C.

3.172　**解析**:由题意,作出Venn图,如图所示.



由图可知听讲座的有 $52+48+46+11+6+3+6=172$（人）.

4.解：(1)由题意，知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cup B=B$，则 $B=A=\{-4,0\}$.

由 $\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\(-4)\times 0=a^2-1,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

(2)由题意，知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$.

①若 B 为空集，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$，解得 $a<-1$，符合题意.

②若 B 只有一个元素，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8=0$，解得 $a=-1$.

将 $a=-1$ 代入方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$，

得 $x^2=0$，即 $x=0$，则 $B=\{0\}$，符合题意.

③若 $B=A=\{-4,0\}$，由(1)可知 $a=1$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1$，或 $a=1\}$.

自我超越

D

课后素养评价(五)

基础落实

1.A　**解析**：因为全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{x\mid x^2=2x\}=\{0,2\}$，所以 $\complement_U A=\{-2,-1,1\}$.故选 A.

2.C　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -2<x\leqslant 5\}=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid x-3>0\}=\{x\mid x>3\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 3\}$，故 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{0,1,2,3\}$.故选 C.

3.AD

4.$\{x\mid x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 10\}$　$\{x\mid 2<x<3$，或 $7\leqslant x<10\}$

5.解：(1)因为 $a=0$，所以 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.

(2)由 $A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，得 $B\subseteq A$，

得 $\begin{cases}2a\leqslant -1,\\a+3\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\leqslant -\dfrac{1}{2},\\a\geqslant -2,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,-2\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}\right\}$.

能力提升

1.C　**解析**：因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，所以 $A\cap B=\{3\}$，所以 $\complement_B(A\cap B)=\{4,5\}$.故选 C.

2.B　**3.**$\{m\mid m<1\}$

4.解：(1)因为 $A=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 5\}$.

又全集 $U=\mathbf{R}$，则 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid 2<x<5\}$.

(2)由(1)得 $D=\{x\mid 2<x<5\}$.

由 $C\cap D=C$，得 $C\subseteq D$.

①当 $C=\varnothing$ 时，有 $-a<2a-3$，解得 $a>1$；

②当 $C\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}2a-3\leqslant -a,\\2a-3>2,\\-a<5,\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$.

综上，a 的取值范围为 $\{a\mid a>1\}$.

自我超越

$\varnothing$　**解析**：若 M 为 $\mathbf{N}^*$ 的真子集，则 $\complement_U M$ 为由部分正整数组成的非空集合，故 $\complement_U M$ 中存在最小元素 m，故 $m\notin M$，从而 $m\neq 1$，于是 $m-1\in\mathbf{N}^*$.

因为 $m-1<m$，若 $m-1\in M$，则由 M 的性质可知 $m\in M$，这与 $m\notin M$ 矛盾.

所以 $m-1\in\complement_U M$，但这又与 m 是 $\complement_U M$ 中的最小元素矛盾，所以 M 不是 $\mathbf{N}^*$ 的真子集，即 $M=\mathbf{N}^*$，则 $\complement_U M=\varnothing$.

课后素养评价(六)

基础落实

1.B

2.B　**解析**：对于 A，“四边形是矩形”是“四边形是平行四边形”的充分不必要条件，故选项 A 不符合题意；

对于 B，若四边形是平行四边形，则四边形的对角线互相平分，即“四边形的对角线互相平分”是“四边形是平行四边形”的必要条件，故选项 B 符合题意；

对于 C，四边形四条边相等即为菱形，是“四边形是平行四边形”的充分不必要条件，故选项 C 不符合题意；

对于 D，由“四边形是平行四边形”得不到四边形的对角线互相垂直，故“四边形的对角线互相垂直”不是“四边形是平行四边形”的必要条件，故选项 D 不符合题意.

故选 B.

3.BCD

4.一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等；一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例(答案不唯一)

5.解：(1)p：$x^2>0$，则 $x>0$ 或 $x<0$，q：$x>0$，故 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件.

(2)p：$x+2\neq y$，q：$(x+2)^2\neq y^2$，则 $x+2\neq y$，且 $x+2\neq -y$，故 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件.

(3)p：a 能被 6 整除，故 a 也能被 3 和 2 整除，q：a 能被 3 整除，故 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

(4)p：两个角不都是直角，这两个角可以相等，q：两个角不相等，则这两个角一定不都是直角，故 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件.

能力提升

1.A　**2.**ACD　**3.**必要　充分

4.解：(1)要使“$2x+m<0$”是“$x<-1$ 或 $x>3$”的充分条件，只需 $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{m}{2}\right\}\subseteq\{x\mid x<-1$，或 $x>3\}$，所以 $-\dfrac{m}{2}\leqslant -1$，即 $m\geqslant 2$.

故存在实数 m，当 $m\geqslant 2$ 时，“$2x+m<0$”是“$x<-1$ 或 $x>3$”的充分条件.

(2)要使“$2x+m<0$”是“$x<-1$ 或 $x>3$”的必要条件，只需 $\{x\mid x<-1$，或 $x>3\}\subseteq\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{m}{2}\right\}$，但这是不可

能的，故不存在实数 m，使“$2x+m<0$”是“$x<-1$ 或 $x>3$”的必要条件.

自我超越

$k=-1$ 且 $b=-1$（答案不唯一） **解析**：由一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 可知，$k>0$ 时，图象必过第一、三象限，$k<0$ 时，图象过第二、四象限；当 $b>0$ 时，一次函数图象交于 y 轴正半轴，当 $b<0$ 时，一次函数图象交于 y 轴负半轴，当 $b=0$ 时，一次函数图象过原点，所以一次函数的图象不过第一象限的充分条件是 $k<0$，$b\leqslant0$，可取 $k=-1$ 且 $b=-1$.

课后素养评价（七）

基础落实

1.A **解析**：设集合 $A=\{x\mid5<x<10\}$，$B=\{x\mid-8<x<12\}$.因为集合 A 是集合 B 的真子集，所以 $5<x<10$ 是 $-8<x<12$ 的充分不必要条件.故选 A.

2.B **解析**：由集合 $A=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，可得集合 A 是全体奇数组成的集合.

又由 $B=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，可得集合 B 是全体被 4 除余 1 的整数组成的集合.

因为 $4n+1=2\times2n+1$，所以 $B\subsetneqq A$，所以“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件.故选 B.

3.AC **解析**：设 $M=\{x\mid-3<x<2\}$，选项对应的集合为 N.

因为题中所求的是“$-3<x<2$”的一个必要不充分条件，所以 M 是 N 的真子集，

$M=\{x\mid-3<x<2\}$ 是 $\{x\mid x>-3\}$，$\{x\mid-3<x<3\}$ 的真子集.故选 AC.

4.C

5.两组对边分别平行；一组对边平行且相等（答案不唯一）

6.解：(1) 因为 $a=1$，$A=\{x\mid2a+1\leqslant x\leqslant3a+5\}$，所以 $A=\{x\mid3\leqslant x\leqslant8\}$.

因为 $B=\{x\mid x\leqslant-2$，或 $x\geqslant5\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid3\leqslant x\leqslant8\}\cup\{x\mid x\leqslant-2$，或 $x\geqslant5\}=\{x\mid x\leqslant-2$，或 $x\geqslant3\}$.

(2) 因为“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要不充分条件，所以 $A\subsetneqq B$.

①若 $A=\varnothing$，则 $2a+1>3a+5$，即 $a<-4$，满足题意；

②若 $A\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a+5,\\2a+1\geqslant5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a+5,\\3a+5\leqslant-2,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\geqslant-4,\\a\geqslant2\end{cases}$，或 $\begin{cases}a\geqslant-4,\\a\leqslant-\dfrac{7}{3},\end{cases}$ 所以 $a\geqslant2$ 或 $-4\leqslant a\leqslant-\dfrac{7}{3}$.

综合①②知，实数 a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-\dfrac{7}{3}$，或 $a\geqslant2\right\}$.

能力提升

1.D **2.**BCD **3.**$\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$

4.证明：必要性：若 $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{2}{ab}$，

则 $\dfrac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}=\dfrac{2}{ab}$，

所以 $a^2+a+b^2+b+2ab=2$，

即 $(a+b)^2+(a+b)-2=0$，

故 $(a+b-1)(a+b+2)=0$.

因为 a，b 是正实数，所以 $a+b+2>0$，

所以 $a+b-1=0$，即 $a+b=1$.

充分性：若 $a+b=1$，

则 $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2+2ab+(a+b)}{ab}=\dfrac{(a+b)^2+(a+b)}{ab}$

$=\dfrac{1+1}{ab}=\dfrac{2}{ab}$.

综上，“$a+b=1$”是“$\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{2}{ab}$”的充要条件.

自我超越

B **解析**：若 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b=0$，则 $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$，即 $a^2+b^2=a^2+b^2+2ab$，所以 $ab=0$，但不能推出 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$；若 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，且 $ab=0$，则 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-(a+b)=(a+b)-(a+b)=0$.所以 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补的必要不充分条件.故选 B.

课后素养评价（八）

基础落实

1.C **2.**C

3.C **解析**：对于 A，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1>0$，故选项 A 错误；

对于 B，当 $x\in\mathbf{N}^*$ 时，$4x\geqslant4$，故选项 B 错误；

对于 C，$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|\geqslant0$，故选项 C 正确；

对于 D，因为有的无理数的平方仍是无理数，如：π^2，故选项 D 错误.故选 C.

4.AC

5.解：(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x\cdot(-1)=-x$.

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3>x^2$.

(3) $\exists x\in\mathbf{Z}$，x 既能被 2 整除，又能被 3 整除.

(4) $\exists x\in\{x\mid x$ 是四边形$\}$，x 不是平行四边形.

能力提升

1.B **解析**：A 中，“锐角三角形的内角是锐角或钝角”是全称量词命题；B 中，有存在量词“至少有一个”，且当 $x=0$ 时，$x^2=0$，所以选项 B 既是存在量词命题又是真命题；C 中，因为 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$，所以选项 C 是假命题；D 中，对于任意一个负数 x，都有 $\dfrac{1}{x}<0$，所以选项 D 是假命题.

2.ABD

3.D **解析**：由已知命题“存在 $x\in\{x\mid0<x<3\}$，使得等式 $2x-m=0$ 成立”是假命题，

等价于“对任意 $x\in\{x\mid0<x<3\}$，使得等式 $2x-m\neq0$ 成立”是真命题.

又因为 $0<x<3$，所以 $0<2x<6$，要使 $2x\neq m$，则需 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 6$.

所以实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 6\}$.故选 D.

4.解：因为 $x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$，

若 p 是真命题，则 $a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$.

因为 $x^2+x+2a-1=0$，若 q 为假命题，

则 $\Delta=1-4\times(2a-1)=5-8a<0$，即 $a>\frac{5}{8}$.

综上，$a\geqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 1\}$.

自我超越

$\{m\mid m\geqslant -4\}$　**解析**：因为 $x_1\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$x_2\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $y_1\in\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 9\}$，$y_2\in\{y\mid -4-m\leqslant y\leqslant -m\}$.

又因为对 $\forall x_1\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\exists x_2\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，

即 y_1 的最小值大于或等于 y_2 的最小值，即 $-4-m\leqslant 0$，

所以 $m\geqslant -4$，即实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant -4\}$.

课后素养评价(九)

基础落实

1.B　**解析**：根据全称量词命题与存在量词命题的关系，可得命题“$\exists x>0$，$x^2-2x-1<0$”的否定是“$\forall x>0$，$x^2-2x-1\geqslant 0$”.故选 B.

2.D　**解析**：根据全称量词命题与存在量词命题的关系，可得命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+2\neq 0$ 的否定为“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+2=0$”.故选 D.

3.AC　**4.** $\forall x>1$，$x^2-4\geqslant 0$

5.(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+a\neq 0$　(2)$\{a\mid a\leqslant 1\}$

能力提升

1.ABC　**解析**：命题的否定为真命题等价于原命题为假命题.对于 A，由 $1<4x<3$，得 $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$，这样的整数不存在，故 A 为假命题，其否定为真命题，A 符合；同理选项 B，C 为假命题，其否定为真命题，B，C 符合；由 $x^2+3x+2=0$，得 $x=-1$ 或 $x=-2$，故 D 为真命题，其否定为假命题，故 D 不符合.故选 ABC.

2.B　**解析**：对于命题 p，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题；对于命题 q，取 $x=1$，则有 $x^3=1^3=1=x$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题.综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.故选 B.

3.D　**解析**：原命题为全称量词命题，则其否定为“存在正整数 $n>2$，关于 x，y，z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解”.

4.解：由题意知命题 p，q 都是真命题.

由 $\forall x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，都有 $m\geqslant x$ 成立，

得 $m\geqslant x_{\max}$，即 $m\geqslant 3$.

由 $\exists x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，使 $m\geqslant x$ 成立，

得 $m\geqslant x_{\min}$，即 $m\geqslant 1$.

因为两者同时成立，故实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m\geqslant 3\}\cap\{m\mid m\geqslant 1\}=\{m\mid m\geqslant 3\}$.

自我超越

$\{m\mid m>4\}$　**解析**：由题意，$m<m^2-2m-4$ 且 $m>1$，解得 $m>4$.

课后素养评价(十)

基础落实

1.B　**解析**：因为 $m-n=3x^2-x-(2x^2+x-1)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $m\geqslant n$.故选 B.

2.CD　**3.**$10y+x>70$　**4.**$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

5.解：由于矩形菜园靠墙的一边长为 x m，而墙长为 18 m，所以 $0<x\leqslant 18$.

这时菜园的另一条边长为 $\frac{30-x}{2}=15-\frac{x}{2}$(m)，

因此菜园的面积为 $S=x\left(15-\frac{x}{2}\right)$(m^2).

依题意，有 $S\geqslant 216$，即 $x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216$.

故该题中的不等关系可用不等式组表示为 $\begin{cases}0<x\leqslant 18,\\ x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216.\end{cases}$

能力提升

1.C　**解析**：由题意得 $x>0$，$y>0$，因为 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<1$，所以 $x<y$.

2.B　**解析**：因为 $M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)$，且 $0<a_1<1$，$0<a_2<1$，所以 $a_1-1<0$，$a_2-1<0$，所以 $(a_1-1)(a_2-1)>0$，所以 $M>N$.

3.BC　**解析**：因为每个矩形模板需要 5 张 A 薄板，每个菱形模板需要 3 张 A 薄板，每个圆模板需要 10 张 A 薄板，且共有 55 张 A 薄板，所以 $5x+3y+10z\leqslant 55$.因为每个矩形模板需要 12 张 B 薄板，每个菱形模板需要 6 张 B 薄板，每个圆模板需要 13 张 B 薄板，且共有 125 张 B 薄板，所以 $12x+6y+13z\leqslant 125$.故选 BC.

4.90　**解析**：设改造前的窗户面积为 x m^2，窗户增加的面积为 y m^2，$x>0$，$y>0$.

依题意 $\frac{x}{180}\leqslant\frac{x+y}{180+2y}$，即 $180x+2xy\leqslant 180x+180y$，$2xy\leqslant 180y$，$x\leqslant 90$.

所以改造前的窗户面积最大为 90 m^2.

5.证明：(1)因为 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，

所以 $a^2+b^2-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab=a(a-b)<0$，

所以 $a^2+b^2<b$.

(2)由 $a+b=1$,得 $b=1-a$,$a<\frac{1}{2}$,

所以 $2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}$

$=-2a^2+2a-\frac{1}{2}=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)$

$=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0$,

所以 $2ab<\frac{1}{2}$.

自我超越

A　**解析**:根据题意,由 $m\otimes n\geqslant 2$ 知,m 与 n 的最小值大于或等于 2;由 $p\oplus q\leqslant 2$ 知,p 与 q 的最大值小于或等于 2.所以 $mn\geqslant 4$ 且 $p+q\leqslant 4$.

课后素养评价(十一)

基础落实

1.B　**解析**:对于 A,当 $a=-1>b=-3$ 时,可知 $|a|>|b|$ 不成立,故 A 不符合题意;

对于 B,由 $a>b>c>0$,可得 $\frac{a}{a+c}-\frac{b}{b+c}=\frac{a(b+c)}{(a+c)(b+c)}-\frac{b(a+c)}{(a+c)(b+c)}=\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}>0$,所以 $\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+c}$,故 B 符合题意;

对于 C,由 $a<b<0$,可得 $\frac{1}{ab}>0$,则 $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}$,即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$,故 C 不符合题意;

对于 D,当 $c=0$ 时,$c^2(a-b)=0$,故 D 不符合题意.故选 B.

2.BCD

3.ACD　**解析**:因为 $1<x<6$,$2<y<3$,所以 $3<x+y<9$,$2<xy<18$,故 A,C 正确;由题意可知 $-3<-y<-2$,故 $-2<x-y<4$,B 错误;$1<y-1<2$,则 $\frac{1}{2}<\frac{1}{y-1}<1$,故 $\frac{1}{2}<\frac{x}{y-1}<6$,D 正确.故选 ACD.

4.$a=1$,$b=-1$,$c=-2$(答案不唯一)

5.**证明**:因为 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,则 $a>0$,$c<0$,

则 $a-c>b-c>0$,则 $(a-c)(b-c)>0$,则 $\frac{1}{(a-c)(b-c)}>0$,

则 $\frac{1}{(a-c)(b-c)}\cdot(a-c)>\frac{1}{(a-c)(b-c)}\cdot(b-c)>0$,

则 $\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}>0$.

又 $c<0$,则 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

命题得证.

能力提升

1.ACD　**解析**:由 $a<b<0$,得 $\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$ 成立,选项 A 正确;

当 $c>0$ 时,$ac<bc$,其余情况下均不成立,则选项 B 不正确;

$|a|=-a>-b$,则选项 C 正确;

由 $-a>-b>0$,可得 $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$,则选项 D 正确.

2.D　**解析**:由 $a>0$,$d<0$,且 $abcd<0$,知 $bc>0$.

又因为 $b>c$,所以 $0<c<b$ 或 $c<b<0$.

3.②③　**解析**:①取 $a=-1$,$b=-2$,$n=2$,则 $a^n>b^n$ 不成立;

②由 $a>|b|$,得 $a>0$,所以 $a^n>b^n$ 成立;

③由 $a<b<0$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立;

④由 $a<b<0$,得 $a-b<0$,且 $a-b>a$,故 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$,④不成立.

4.3

5.**解**:因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$,$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

两式相加,得 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

因为 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$.

所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又 $\alpha<\beta$,所以 $\frac{\alpha-\beta}{2}<0$,

故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

即 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

自我超越

1.A　**解析**:设 $3a+4b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a+(n-m)b$,

则 $\begin{cases}m+n=3,\\ n-m=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{2},\\ n=\frac{7}{2}.\end{cases}$ 因为 $-1\leqslant-\frac{1}{2}(a-b)\leqslant-\frac{1}{2}$,$\frac{21}{2}\leqslant\frac{7}{2}(a+b)\leqslant 14$,

所以 $\frac{19}{2}\leqslant 3a+4b=-\frac{1}{2}(a-b)+\frac{7}{2}(a+b)\leqslant\frac{27}{2}$,则 $3a+4b$ 的最大值为 $\frac{27}{2}$.

2.$\left(-\frac{1}{5},1\right)$　**解析**:因为 $a<b<c$,$a+2b+3c=0$,

所以 $c=-\frac{a+2b}{3}$,且 $6a<a+2b+3c=0<6c$,所以 $a<0$,$c>0$.

由 $b<c$，得 $b<-\frac{a+2b}{3}$，则 $5b<-a$，即 $\frac{5b}{a}>-1$，即 $\frac{b}{a}>-\frac{1}{5}$.又 $a<b$，则 $\frac{b}{a}<1$，

因此 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{5},1\right)$.

课后素养评价(十二)

基础落实

1.B

2.D　**解析**：$(x-1)(y-2)=xy-2x-y+2$.因为 $2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}=8$，所以 $-2x-y\leqslant -8$，

从而 $xy-2x-y+2\leqslant 8-8+2=2$，当且仅当 $2x=y=4$ 时，等号成立，所以 $(x-1)(y-2)$ 的最大值是 2.故选 D.

3.A　**解析**：$x(1-2x)=2x\left(\frac{1}{2}-x\right)\leqslant 2\left(\frac{x+\frac{1}{2}-x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}-x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立.故选 A.

4.100　**5.**$x\leqslant\frac{a+b}{2}$

6.解：因为 $xy=4$，且 $x>0$，$y>0$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}$，即 $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ 时，等号成立，即 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

能力提升

1.B　**解析**：显然 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.由题易知 $P>0$，$M>0$，$M^2-P^2=a+b-\frac{(a+b)^2}{4}=(a+b)\left(1-\frac{a+b}{4}\right)=(a+b)\cdot\frac{4-(a+b)}{4}$.

因为 $0<a<b<1$，所以 $4-(a+b)>0$，所以 $a+b>\frac{(a+b)^2}{4}$，

即 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{a+b}$.所以 $\sqrt{a+b}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

即 $M>P>Q$.

2.ABC　**解析**：由 $a+b=4$，可得 $\sqrt{ab}\leqslant 2$，得 $ab\leqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{4}$，故 A，C 不一定恒成立；

B 中，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{ab}\geqslant 1$，故 B 不一定恒成立；

由 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，得 $a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\frac{4}{2}\right)^2=8$，所以 $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$，D 一定恒成立.

3.$\left\{a\,\middle|\,a\geqslant\frac{1}{2}\right\}$　**解析**：若关于 x 的不等式 $2x+\frac{2}{x-a}\geqslant 5$ 恒成立，则 $\left(2x+\frac{2}{x-a}\right)_{\min}\geqslant 5$.

因为 $x>a$，故 $2x+\frac{2}{x-a}=2(x-a)+\frac{2}{x-a}+2a\geqslant 2\sqrt{2(x-a)\cdot\frac{2}{x-a}}+2a=4+2a$，

当且仅当 $x=a+1$ 时取等号，故得 $4+2a\geqslant 5$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

4.解：(1) $x(4-3x)=\frac{1}{3}\times 3x\times(4-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left(\frac{3x+4-3x}{2}\right)^2=\frac{4}{3}$，

当且仅当 $3x=4-3x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时取等号.

故 $x(4-3x)$ 取得最大值 $\frac{4}{3}$ 时，x 的值为 $\frac{2}{3}$.

(2) 因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+2x-2+3}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+3}{x-1}=(x-1)+\frac{3}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{3}+2$，

当且仅当 $x-1=\frac{3}{x-1}$，即 $x=\sqrt{3}+1$ 时取等号.

故 $\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$.

(3)因为 $x+y=4$，所以 $\frac{1}{4}(x+y)=1$.又 $x>0$，$y>0$，

所以 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{4}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)=1+\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)\geqslant 1+\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{3x}{y}$，即 $x=2(\sqrt{3}-1)$，$y=2(3-\sqrt{3})$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

自我超越

(1)4　(2)$2\sqrt{2}$　**解析**：(1) $\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$(前一个等号成立条件是 $a^2=2b^2$，后一个等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{2}$，两个等号可以同时取得，则当且仅当 $a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，等号成立).

(2)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$ 且 $\frac{2}{b}=b$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

课后素养评价(十三)

基础落实

1.B

2.C　**解析**:由题意,得 $a+3b=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a+3b)$

$=\frac{1}{2}\left(6+\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(6+2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=6$,当且仅当 $\frac{9b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=3,b=1$ 时,等号成立,故 $a+3b$ 的最小值为 6.故选 C.

3.C　**4.**6　4

5.证明:(1)因为 $a+b=1$,所以 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$.

因为 $a>0,b>0$,所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.

所以 $1-2ab\geqslant1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,即 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$,故 $2a^2+2b^2\geqslant1$.

(2)因为 $a+b=1$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10$.

因为 $a>0,b>0$,所以 $\frac{b}{a}>0,\frac{9a}{b}>0$,

所以 $\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=6$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$,即 $a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$ 时,等号成立.

则 $\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10\geqslant16$,即 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant16$.

能力提升

1.B　**解析**:因为 $x>1$,所以 $x-1>0$,

则 $\frac{1}{1-x}-x=\frac{1}{1-x}+1-x-1=-\left(\frac{1}{x-1}+x-1\right)-1\leqslant-2\sqrt{\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)}-1=-3$,

当且仅当 $\frac{1}{x-1}=x-1$,即 $x=2$ 时,等号成立,所以 $\frac{1}{1-x}-x$ 的最大值为 -3.故选 B.

2.D　**解析**:由题意得 $5-x>0$,

则 $\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}\right)(x+5-x)=\frac{1}{5}\left(\frac{5-x}{x}+\frac{16x}{5-x}+17\right)\geqslant\frac{1}{5}\left(2\sqrt{\frac{5-x}{x}\cdot\frac{16x}{5-x}}+17\right)=5$,

当且仅当 $\frac{5-x}{x}=\frac{16x}{5-x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,故 $\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}$ 的最小值为 5.故选 D.

3.4　**解析**:因为 $a-b>0,b-c>0,a-c>0$,要使原不等式成立,

只需 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$ 成立,

即 $\frac{a-b+(b-c)}{a-b}+\frac{a-b+(b-c)}{b-c}\geqslant n$ 成立,

也就是 $2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant n$ 成立.

又 $\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=2$,当且仅当 $b-c=a-b$,

即 $a+c=2b$ 时,等号成立,

所以 $n\leqslant4$,所以 n 的最大值为 4.

4.解:(1)因为 $AB=x$,所以 $AD=\frac{100}{x}$,$EF=x-2$,$FG=\frac{100}{x}-1$,

所以 $S=(x-2)\left(\frac{100}{x}-1\right)=102-\frac{200}{x}-x$.

由 $0<x\leqslant20$,$0<\frac{100}{x}\leqslant20$,解得 $5\leqslant x\leqslant20$.

所以 $S=102-\frac{200}{x}-x,5\leqslant x\leqslant20$.

(2)$S=102-\frac{200}{x}-x=102-\left(\frac{200}{x}+x\right)\leqslant102-2\sqrt{\frac{200}{x}\cdot x}=102-20\sqrt{2}$,

当且仅当 $x=\frac{200}{x}$,即 $x=10\sqrt{2}$ 时,等号成立.

经验证,符合题意.

所以当 $AB=10\sqrt{2}$ m 时,S 取得最大值,最大值为 $(102-20\sqrt{2})\text{m}^2$.

自我超越

D　**解析**:对于 A,因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$,当且仅当 $a=b=1$ 时,等号成立,所以 ab 的最大值为 1,故 A 错误;

对于 B,因为 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}=2$,当且仅当 $a=b=1$ 时,等号成立,所以 a^2+b^2 的最小值为 2,故 B 错误;

对于 C,因为 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{9}{2}$,当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$ 且 $a+b=2$,即 $a=\frac{4}{3},b=\frac{2}{3}$ 时,等号成立,所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$,故 C 错误;

对于 D,$(m^2+n^2)(x^2+y^2)-(mx+ny)^2=n^2x^2+m^2y^2-2mnxy=(nx-my)^2\geqslant0$,可得 $(mx+ny)^2\leqslant(m^2+n^2)(x^2+y^2)$,当且仅当 $nx-my=0$,即 $nx=my$ 时,等号成立,则 $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\leqslant[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2](1^2+2^2)=5(a+b)=10$,即 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{10}$,当且仅当 $2\sqrt{a}=\sqrt{b}$,即 $b=4a$

$=\frac{8}{5}$时，等号成立，所以$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$的最大值为$\sqrt{10}$，故D正确.故选D.

课后素养评价(十四)

基础落实

1.D

2.B　**解析**：由题意得$x^2-2x-3<0$，因式分解得$(x+1)(x-3)<0$，解得$-1<x<3$，

可得$A=\{x\mid -1<x<3\}$，则$A\cap B=\{x\mid 0<x<3\}$.故选B.

3.BCD

4.解：(1)由$3x^2-7x\leqslant 10$，得$3x^2-7x-10\leqslant 0$，

即$(3x-10)(x+1)\leqslant 0$，所以$-1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$，

所以不等式的解集为$\left\{x\middle| -1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}\right\}$.

(2)由$-x^2-4x+5<0$，得$x^2+4x-5>0$，

故$(x+5)(x-1)>0$，解得$x>1$或$x<-5$，

故不等式的解集为$\{x\mid x<-5$，或$x>1\}$.

(3)由$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$，无解，

所以不等式的解集为$\varnothing$.

能力提升

1.D　**解析**：因为方程$x^2+mx+1=0$有两个不相等的实数根，所以$\Delta=m^2-4>0$，所以$m>2$或$m<-2$.

2.D　**解析**：因为不等式$ax^2-bx+c>0$的解集为$\{x\mid -2<x<1\}$，

所以$a<0$且方程$ax^2-bx+c=0$的两根分别为$x=-2$和$x=1$，所以$\frac{b}{a}=-2+1=-1$，$\frac{c}{a}=-2\times 1=-2$，即$b=-a$，$c=-2a$.

此时$ax^2+(a-b)x+c-a=ax^2+2ax-3a<0$.又$a<0$，所以$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)>0$，解得$x<-3$或$x>1$，

所以$ax^2+(a-b)x+c-a<0$的解集为$\{x\mid x<-3$或$x>1\}$.故选D.

3.$\left\{a\middle| -\frac{3}{5}<a\leqslant 1\right\}$　**解析**：①当$a^2-1\neq 0$，即$a\neq\pm 1$时，

$\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$解得$-\frac{3}{5}<a<1$.

②当$a^2-1=0$，即$a=\pm 1$时，

若$a=1$，则原不等式为$-1<0$，恒成立；

若$a=-1$，则原不等式为$2x-1<0$，即$x<\frac{1}{2}$，不符合题意，舍去.

综上所述，实数a的取值范围是$\left\{a\middle| -\frac{3}{5}<a\leqslant 1\right\}$.

4.解：(1)由关于x的不等式$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$的解集为$\left\{x\middle| -\frac{3}{2}<x<1\right\}$，可知$-\frac{3}{2}$和1是方程$2kx^2+kx-\frac{3}{8}=0$的两个实数根，且$k>0$.由根与系数的关系得$\left(-\frac{3}{2}\right)\times 1=\frac{-\frac{3}{8}}{2k}$，解得$k=\frac{1}{8}$.

(2)当$k=0$时，原不等式为$-\frac{3}{8}<0$，恒成立，满足题意；

当$k\neq 0$时，则有$\begin{cases}2k<0,\\ \Delta=k^2+3k<0,\end{cases}$解得$-3<k<0$.

综上，实数k的取值范围为$\{k\mid -3<k\leqslant 0\}$.

自我超越

C　**解析**：由$4[x]^2-12[x]+5\leqslant 0$可得$\frac{1}{2}\leqslant[x]\leqslant\frac{5}{2}$.由题中定义可知$[x]$的可能取值有1，2.当$[x]=1$时，$1\leqslant x<2$；当$[x]=2$时，$2\leqslant x<3$.

综上所述，使不等式$4[x]^2-12[x]+5\leqslant 0$成立的$x$的取值范围是$\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.故选C.

课后素养评价(十五)

基础落实

1.A　**解析**：因为$\frac{x-3}{x-7}\leqslant 0$，所以$\begin{cases}(x-3)(x-7)\leqslant 0,\\ x-7\neq 0,\end{cases}$解得$3\leqslant x<7$，即$B=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，所以$A\cap B=\{3,5\}$.故选A.

2.C　**3.**B

4.解：(1)不等式$\frac{2-x}{x+3}>1$可化为$\frac{2-x-(x+3)}{x+3}>0$，

化简得$\frac{-2x-1}{x+3}>0$，即$\frac{2x+1}{x+3}<0$，

等价于$(2x+1)(x+3)<0$，解得$-3<x<-\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为$\left\{x\middle| -3<x<-\frac{1}{2}\right\}$.

(2)因为不等式$ax-b>0$的解集是$\left\{x\middle| x>\frac{1}{2}\right\}$，

所以$a>0$，且$a=2b$.

则不等式$\frac{ax-2b}{-x+5}>0$等价于$\frac{x-1}{-x+5}>0$，即$\frac{x-1}{x-5}<0$.

所以$(x-1)(x-5)<0$，解得$1<x<5$.

因此原不等式的解集为$\{x\mid 1<x<5\}$.

能力提升

1.AB　**解析**：当$a<-1$时，$-1<\frac{1}{a}<0$，此时解集为$\left\{x\middle| x<-1$或$x>\frac{1}{a}\right\}$；

当$a=-1$时，$\frac{1}{a}=-1$，此时解集为$\{x\mid x\neq -1\}$；

当$-1<a<0$时，$\frac{1}{a}<-1$，此时解集为$\left\{x\middle| x<\frac{1}{a}$或$x>-1\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式为 $-(x+1)<0$，此时解集为 $\{x|x>-1\}$；

当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0$，此时解集为 $\left\{x\left|-1<x<\frac{1}{a}\right.\right\}$.

故选 AB.

2.ACD　**解析**：当 $a=0$ 时，不等式 $-4x+2<0$ 有实数解，符合题意；

当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2-4x+2$ 的图象开口向下，则不等式 $ax^2-4x+2<0$ 有解；

当 $a>0$ 时，由 $\Delta=16-8a>0$，解得 $0<a<2$.

综上，a 的取值范围为 $\{a|a<2\}$.故选 ACD.

3.解：(1)由题意知，$\triangle NDC\backsim\triangle NAM$，则 $\frac{DC}{AM}=\frac{ND}{NA}$，即 $\frac{x}{30}=\frac{20-AD}{20}$，解得 $AD=20-\frac{2}{3}x$.

所以矩形 $ABCD$ 的面积 S 关于 x 的函数解析式为

$S=20x-\frac{2}{3}x^2(0<x<30)$.

(2)由题意得 $20x-\frac{2}{3}x^2\geqslant 144$，即 $x^2-30x+216\leqslant 0$，解得 $12\leqslant x\leqslant 18$.

故 x 的取值范围是 $\{x|12\leqslant x\leqslant 18\}$.

自我超越

A　**解析**：原不等式可化为 $(2x+1)(x-a)<0$，

则方程 $2x^2+(1-2a)x-a=0$ 的两个根为 a 和 $-\frac{1}{2}$.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为空集，不满足题意；

当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{a\left|a<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$，则 a 不能取到正数值；

当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{a\left|-\frac{1}{2}<x<a\right.\right\}$，要使不等式的解集中整数有且只有 3 个，则 $2<a\leqslant 3$.

故选 A.

课后素养评价(十六)

基础落实

1.B

2.AD　**解析**：根据函数的定义，对于定义域内任意 x，都有且仅有唯一的函数值与其相对应，故满足函数关系的有 AD.

3.AD

4.C　**解析**：令 $f(x)=x^2=9$，则 $x=\pm 3$，则满足条件的 $f(x)$ 有 $f(x)=x^2,x\in\{3\}$；$f(x)=x^2,x\in\{-3\}$；$f(x)=x^2,x\in\{-3,3\}$，故满足条件的 $f(x)$ 有 3 个.故选 C.

5.$\{x|x\neq 0\}$　$\{y|y\neq 0\}$

能力提升

1.B　**解析**：对于 A，若 $y=x$，则当 $x=-2$ 时，$y=-2\notin N$，故选项 A 不符合题意；

对于 B，若 $y=|x|$，则当 $x=\pm 2$ 时，$y=2\in N$，当 $x=0$ 时，$y=0\in N$，故选项 B 符合题意；

对于 C，若 $y=\frac{4}{x}$，则当 $x=0$ 时，y 无意义，故选项 C 不符合题意；

对于 D，若 $y=x^2$，则当 $x=\pm 2$ 时，$y=4\notin N$，故选项 D 不符合题意.故选 B.

2.BC　**解析**：A 不是，集合 A 中的元素 0 在集合 B 中没有对应的元素.B 是，对于集合 A 中的任意一个整数 x，按照对应关系 $f:x\to y=x^2$，在集合 B 中都有唯一一个确定的整数 x^2 与之对应.C 是，对于集合 A 中任意一个实数 x，按照对应关系 $f:x\to y=0$，在集合 B 中都有唯一一个确定的数 0 和它对应.D 不是，集合 A 中的元素 3 在集合 B 中没有对应的元素，且 A 中的元素 2 在集合 B 中有 5 和 6 两个元素与之对应.

3.2　$\{y|-2\leqslant y\leqslant 2\}$

4.解：某汽车租赁公司有 200 辆小汽车，若每辆车一天的租金为 300 元，可全部租出；若将每天的租金提高 $10x$ 元 $(1\leqslant x\leqslant 50,x\in\mathbf{N}^*)$，则租出的车辆会相应减少 $4x$ 辆.

设该汽车租赁公司每天的收入为 y 元，则 $y=(300+10x)(200-4x)$.

自我超越

(1)$f(x)=x$，$g(x)=2x+1$(答案不唯一)　**解析**：函数 $f(x)=x$，$g(x)=2x+1$，定义域和值域都是 $\mathbf{R}$，但对应关系不同.

(2)$f(x)=x^2,x\in[0,+\infty)$，$g(x)=x^2,x\in(-\infty,0]$(答案不唯一)　**解析**：函数 $f(x)=x^2,x\in[0,+\infty)$，$g(x)=x^2,x\in(-\infty,0]$，值域都是 $[0,+\infty)$，但定义域不同.

课后素养评价(十七)

基础落实

1.A　**解析**：由区间的定义可知，$A=\{x|x<3$ 或 $x\geqslant 4\}=(-\infty,3)\cup[4,+\infty)$.故选 A.

2.D　**解析**：要使函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$ 有意义，需满足 $\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 4$ 且 $x\neq 1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,4]$.故选 D.

3.AC　**4.**$\left(\frac{5}{2},5\right)$　**5.**$[-3,1]$

6.(1)**解**：要使函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 有意义，只需 $1-x^2\neq 0$，得 $x\neq\pm 1$，所以函数的定义域为 $\{x|x\neq\pm 1\}$.

(2)**解**：因为 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$，且 $f(a)=2$，

所以 $f(a)=\frac{1+a^2}{1-a^2}=2$，即 $a^2=\frac{1}{3}$，解得 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)**证明**：由已知，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$，

$-f(x)=-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

能力提升

1.B　**解析**：因为 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,3]$，所以 $f(x-1)$ 中 $x\in[0,3]$，所以 $x-1\in[-1,2]$.

在 $f(2x-1)$ 中令 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 2$，解得 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.故选 B.

2.BD　**解析**：对于 A，$f(x)=x-1(x\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$，两个函数的定义域不同，故不为同一个函数；对于 B，$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1,\\-1-x,x<-1,\end{cases}$ 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，对应关系相同，故为同一个函数；对于 C，$f(x)=1,x\in\mathbf{R}$，$g(x)=(x+1)^0(x\neq -1)$，两个函数的定义域不同，故不为同一个函数；对于 D，$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}=1(x>0)$，$g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}=1(x>0)$，即两个函数的定义域相同，对应关系相同，故为同一个函数.

3.解：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{-x^2-4x+5}$.

由 $-x^2-4x+5\geqslant 0$，得 $-5\leqslant x\leqslant 1$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,1]$.

(2)因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $ax^2+4ax+5\geqslant 0$ 对任意实数 x 恒成立.

当 $a=0$ 时，$f(x)=\sqrt{5}$，满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，有 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=(4a)^2-20a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\dfrac{5}{4}$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{5}{4}\right]$.

自我超越

A　**解析**：因为函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$，所以区间 $\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$ 的长度为 $\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$.

设 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集为 $[x_1,x_2]$，所以 $|x_2-x_1|=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$.

因为 $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，

且 $a<0$，所以 $a^2=-4a$，解得 $a=-4$.故选 A.

课后素养评价(十八)

基础落实

1.C

2.A　**解析**：因为函数 $f(x-3)=\dfrac{1}{(x-3)+3}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$，则 $f(2)=\dfrac{1}{5}$.故选 A.

3.A　**4.**x^2-2x-1

5.$\dfrac{17}{4}$　x^2+2　**解析**：因为 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$，所以 $f(x)=x^2+2$，

所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2=\dfrac{17}{4}$.

6.解：(1)以 $-x$ 代替 x 可得 $f(-x)-2f(x)=1-2x$，

联立得 $\begin{cases}f(x)-2f(-x)=1+2x,\\f(-x)-2f(x)=1-2x,\end{cases}$

消去 $f(-x)$ 可得 $f(x)=\dfrac{2}{3}x-1$.

(2)由 $\begin{cases}f(1)=1-b+c=0,\\f(2)=4-2b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=6,\\c=5.\end{cases}$

故 $f(x)=x^2-6x+5$.

能力提升

1.C　**解析**：由 $3x+2=2$ 得 $x=0$.所以 $a=2\times 0+1=1$.故选 C.

2.D　**解析**：因为 $2f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，所以 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)-f(x)=x$.两式联立可得 $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x}+x\right)=\dfrac{2+x^2}{3x}$.故选 D.

3.C　**解析**：观察 $f(x)$ 的表格：当 $x=1$ 时，$f(1)=4\geqslant 2$；当 $x=2$ 时，$f(2)=3\geqslant 2$；

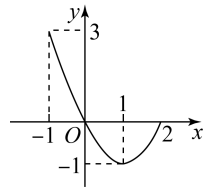
当 $x=3$ 时，$f(3)=2\geqslant 2$；当 $x=4$ 时，$f(4)=1<2$.所以满足 $f(x)\geqslant 2$ 的 x 取值为 1,2,3.

当 $g(t)=1$ 时，由 $g(x)$ 表格可知 $t=2$；当 $g(t)=2$ 时，由 $g(x)$ 表格可知 $t=1$；

当 $g(t)=3$ 时，由 $g(x)$ 表格可知 $t=4$.所以 $f(g(t))\geqslant 2$ 时，t 的值可以是 1,2 或 4.故选 C.

4.$y=80x(x+10),x\in(0,+\infty)$　**解析**：由题意可知，长方体的长为 $(x+10)$ cm，从而长方体的体积 $y=80x(x+10),x>0$.

5.解：(1)$f(x)$ 的图象如图所示.



(2)观察 $f(x)$ 的图象可知，$f(x)$ 图象上所有点的纵坐标的取值范围是 $[-1,3]$，即 $f(x)$ 的值域是 $[-1,3]$.

自我超越

①③　**解析**：因为小于或等于 5 的正整数中与 5 互质的正整数为 1,2,3,4，小于或等于 10 的正整数中与 10 互质的正整数为 1,3,7,9，所以 $\varphi(5)=\varphi(10)=4$，故①正确；

当 $n=2$ 时，$\varphi(3)=2\neq 1$，故②不正确；

因为小于或等于 32 的正整数中与 32 互质的正整数为 1，

3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,共有 16 个,所以 $\varphi(32)=16$,故③正确;

当 $n=2$ 时,$\varphi(4)=\varphi(6)=2$,故④不正确.

课后素养评价(十九)

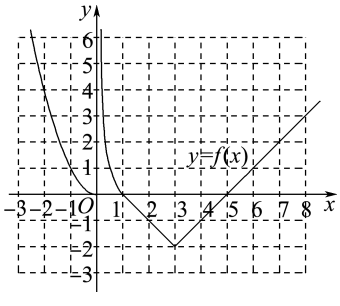
基础落实

1.B　**解析**:因为 $f(2)=-(2-1)^2=-1$,所以 $f(f(2))=f(-1)=3\times(-1)+1=-2$.故选 B.

2.C　**解析**:因为函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 2,\\2f(x-1),x>2,\end{cases}$ 所以 $f(3)=2f(2)=2\times(2+1)=6$.故选 C.

3.13

4.解:(1)因为 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0,\\\dfrac{1-x}{x},0<x<1,\\|x-3|-2,x\geqslant 1,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)由题可得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\x^2\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1,\\\dfrac{1-x}{x}\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\|x-3|-2\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 或 $0<x\leqslant\dfrac{1}{3}$ 或 $x\geqslant 7$,

所以实数 x 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[7,+\infty)$.

能力提升

1.ACD　**解析**:对于 A,因为 $f(f(-1))=f(1)=1^2=1$,故选项 A 正确.

对于 B,当 $x\leqslant-1$ 时,由 $f(x)=3$,得 $x+2=3$,解得 $x=1$(舍去);当 $-1<x<2$ 时,由 $f(x)=3$,得 $x^2=3$,解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=-\sqrt{3}$(舍去),所以 x 的值是 $\sqrt{3}$,故选项 B 错误.

对于 C,当 $x\leqslant-1$ 时,$f(x)=x+2\in(-\infty,1]$;当 $-1<x<2$ 时,$f(x)=x^2\in[0,4)$,且 $(-\infty,1]\cup[0,4)=(-\infty,4)$,所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4)$,故选项 C 正确.

对于 D,当 $x\leqslant-1$ 时,由 $f(x)<1$,得 $x+2<1$,解得 $x<-1$;当 $-1<x<2$ 时,由 $f(x)<1$,得 $x^2<1$,解得 $-1<x<1$,所以不等式的解集是 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$,故选项 D 正确.故选 ACD.

2.解:(1)当点 P 在线段 AB 上运动时,$AP=x$.根据三角形的面积公式可得 $y=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AP=\dfrac{1}{2}\times 8\times x=4x$;

当点 P 在线段 BC 上运动时,面积不变,$y=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times 8\times 6=24$;

当点 P 在线段 CD 上运动时,$DP=6+8+6-x=20-x$,$AD=8$.

根据三角形的面积公式可得 $y=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot DP=\dfrac{1}{2}\times 8\times(20-x)=80-4x$.

所以 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\begin{cases}4x,0\leqslant x\leqslant 6,\\24,6<x\leqslant 14,\\80-4x,14<x\leqslant 20.\end{cases}$

(2)当 $x=4$ 时,$y=4x=4\times 4=16$;

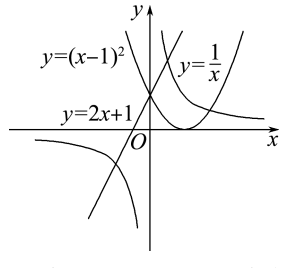
当 $x=18$ 时,$y=80-4\times 18=8$.

(3)由 $y=4x=20$,解得 $x=5$,此时点 P 在线段 AB 上;

由 $y=80-4x=20$,解得 $x=15$,此时点 P 在线段 CD 上.

自我超越

A　**解析**:将 $f(x)=(x-1)^2$,$g(x)=2x+1$,$h(x)=\dfrac{1}{x}$,画在同一个平面直角坐标系中,如图所示.



由函数 $m(x)=\min\{f(x),g(x),h(x)\}$ 的定义,取三个函数中的最小者,可得 $m(x)$ 的图象.故选 A.

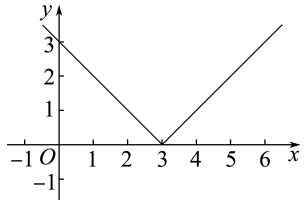
课后素养评价(二十)

基础落实

1.A　**解析**:因为函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的单调递增函数,且 $-3<-2<\pi$,所以 $f(\pi)>f(-2)>f(-3)$.故选 A.

2.B　**3.**ACD

4.$(-\infty,3]$　**解析**:因为 $f(x)=|x-3|=\begin{cases}x-3,x>3,\\3-x,x\leqslant 3.\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可知,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,3]$

5.(1)**解**:因为 $f(1)=\dfrac{1+a}{1}=2$,所以 $a=1$,所以 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

(2)**证明**:$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2+1}{x_1}-\frac{x_2^2+1}{x_2}=\frac{(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

因为 $1<x_1<x_2$，$x_1x_2>1$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

能力提升

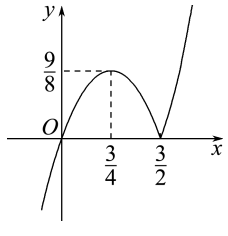
1.B　**解析**：由 $-x^2+4x-3\geqslant 0$，得 $1\leqslant x\leqslant 3$，所以函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 的定义域为 $[1,3]$.

因为二次函数 $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$ 图象的对称轴为直线 $x=2$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2,3]$.故选 B.

2.A　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，

所以 $\begin{cases}-1\leqslant 2a-3\leqslant 1,\\ -1\leqslant a-2\leqslant 1,\\ 2a-3>a-2,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$.

3.D　**解析**：依题意，$f(x)=x|2x-3|=\begin{cases}(3-2x)x, x<\frac{3}{2},\\ (2x-3)x, x\geqslant\frac{3}{2},\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减.故选 D.

4.(1)**证明**：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)>1$.

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$.

所以 $f(x_2)>f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2)**解**：因为 $f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)-1=5$，所以 $f(2)=3$.

所以原不等式可化为 $f(3m-2)<f(2)$.

由(1)可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $3m-2<2$，

解得 $m<\frac{4}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$.

自我超越

B　**解析**：由于函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-3)x+2, x\leqslant 1,\\ \frac{a}{x}, x>1\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

所以函数 $y=(2a-3)x+2$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上为减函数，

函数 $y=\frac{a}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为减函数，且有 $(2a-3)\times 1+2\geqslant\frac{a}{1}$，即 $\begin{cases}2a-3<0,\\ a>0,\\ 2a-1\geqslant a,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$.

因此，实数 a 的取值范围是 $\left[1,\frac{3}{2}\right)$.故选 B.

课后素养评价(二十一)

基础落实

1.B　**解析**：函数 $y=\frac{x+2}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}$，$x\in[4,8]$ 单调递减，所以当 $x=4$ 时，函数的最大值是 6.

2.AB

3.A　**解析**：因为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的最大值为 $f(4)$，所以 $a<0$，且 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称.所以 $f(2)=f(6)$，且 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(5)>f(6)=f(2)>f(8)$.故选 A.

4.180

5.解：(1)$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.证明如下：

设 $\forall x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1+1}{x_1+1}-\frac{2x_2+1}{x_2+1}$

$=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $-1<x_1<x_2$，所以 $x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数.

(2)由(1)可知，$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=\frac{2\times 2+1}{2+1}=\frac{5}{3}$，

最大值为 $f(4)=\frac{2\times 4+1}{4+1}=\frac{9}{5}$.

能力提升

1.A　**解析**：由 $y=f(x)=x^2-2x-3$，可得对称轴为直线 $x=1$，且 $f(1)=-4$ 为最小值.

又由 $f(0)=f(2)=-3$，函数 $y=x^2-2x-3$ 的定义域为 $[0,a]$，值域为 $[-4,-3]$，

可得 $1\leqslant a\leqslant 2$，即实数 a 的取值范围是 $[1,2]$.故选 A.

2.D　**解析**：由题意，得 $m<-2x+1$ 对 $\forall x\in[-1,2]$ 恒成立，且 $y=-2x+1$ 在 $x\in[-1,2]$ 的最小值为 -3，则 $m<-3$.故选 D.

3.解：(1)设二次函数的解析式为 $t=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

由题表得 $\begin{cases}c=1,\\ a+b+c=1.5,\\ 4a+2b+c=1.8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.1,\\ b=0.6,\\ c=1.\end{cases}$

所以所求函数的解析式为 $t=-0.1x^2+0.6x+1(x\geqslant 0)$.

(2)根据题意得 $S=10t\cdot(3-2)-x$，

整理得 $S=-x^2+5x+10(x\geqslant 0)$，

所以 $S=-x^2+5x+10=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{65}{4}$.

(3)因为 $x\in[1,2]$时，S 随 x 的增大而增大，

所以当 $x=2$ 时，S 取得最大值 16.

故当月广告费为 2 万元时，公司可获得最大月利润，最大月利润为 16 万元.

自我超越

AC　**解析**：函数 $y=4+2x-x^2$ 在$[-3,3]$上的最大值为 5.

由 $4+2x-x^2=4$，解得 $x=2$ 或 $x=0$，

所以当 $x\in(0,2)$时，$y=4+2x-x^2>4$.

要使函数 $f(x)$的最大值为 4，则根据定义可知，

若 $t<1$，则当 $x=2$ 时，$|2-t|=4$，解得 $t=-2$，符合题意；

若 $t>1$，则当 $x=0$ 时，$|0-t|=4$，解得 $t=4$，符合题意.

综上所述，$t=-2$ 或 $t=4$.

课后素养评价(二十二)

基础落实

1.CD　**解析**：对于 A，令 $f(x)=x+1$，其定义域为 **R**，因为 $f(-x)=(-x)+1$，所以 $f(-x)\neq -f(x)$，且当 $x\neq 0$ 时，$f(-x)\neq f(x)$，所以 $f(x)$是非奇非偶函数，故选项 A 不符合题意.

对于 B，令 $f(x)=-x^2$，其定义域为 **R**，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，故选项 B 不符合题意.

对于 C，令 $f(x)=x|x|$，其定义域为 **R**，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-x|x|=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，故选项 C 符合题意.

对于 D，令 $f(x)=\frac{1}{x}$，其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，故选项 D 符合题意.故选 CD.

2.B　**解析**：由 $f(x)=(x-2)^2+kx$ 是偶函数，得 $f(x)=(x-2)^2+kx=x^2+(k-4)x+4$，满足二次函数图象的对称轴 $x=-\frac{k-4}{2}=0\Rightarrow k=4$.故选 B.

3.C　**解析**：对于 A，$f(x)+1=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$，不是偶函数，故选项 A 不符合题意；

对于 B，$f(x)-1=(x-1)^2-1=x^2-2x$，不是偶函数，故选项 B 不符合题意；

对于 C，$f(x+1)=(x+1-1)^2=x^2$，为偶函数，故选项 C 符合题意；

对于 D，$f(x-1)=(x-1-1)^2=(x-2)^2$，不是偶函数，故选项 D 不符合题意.故选 C.

4.$\frac{1}{3}$　0　5.y 轴

能力提升

1.B　**解析**：选项 A 中，函数定义域是$\{x|x\neq 1\}$，函数为非奇非偶函数；

选项 B 中，函数定义域是$(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$，是偶函数；

选项 C 中，函数定义域是$\{1\}$，函数为非奇非偶函数；

选项 D 中，函数定义域是$\{x|x\neq 0\}$，$f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$，函数是奇函数.故选 B.

2.B　**解析**：因为 $f(x)$是定义域为 **R** 的奇函数，

所以 $f(0)=0$，$f(3)=-f(-3)=-\frac{8}{-3+2}=8$，$f(-1)=-f(1)=-(1^2-2)=1$，

所以 $f(3)+f(0)+f(-1)=9$.故选 B.

3.A　**解析**：函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，又 $f(-x)=-\frac{1}{x}+x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$为奇函数，排除 BC.又 $f(2)=\frac{1}{2}-2<0$，排除 D.故选 A.

4.-13　**解析**：设 $g(x)=ax^3-bx$，则 $g(x)$的定义域为 **R**，且 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$为奇函数.由 $f(-1)=7$，得 $g(-1)=10$，所以 $g(1)=-10$，从而 $f(1)=g(1)-3=-13$.

5.**解**：因为函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$.

故$\frac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$，即$\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$.

所以$-bx+c=-(bx+c)$，即$c=-c$，解得 $c=0$.

所以 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$.

因为 $f(1)=\frac{a+1}{b}=3$，所以 $a+1=3b$①.

因为 $f(2)=\frac{4a+1}{2b}=5$，所以 $4a+1=10b$②.

联立①②，得$\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\ b=\frac{3}{2}.\end{cases}$故 $a=\frac{7}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$.

自我超越

B　**解析**：构造函数 $f(x)=x^{2\,025}+x$.由$(3x+y)^{2\,025}+x^{2\,025}+4x+y=(3x+y)^{2\,025}+3x+y+x^{2\,025}+x=0$，可得 $f(3x+y)+f(x)=0$.

由于 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 的定义域为 **R**，且有 $f(-x)=(-x)^{2\,025}-x=-(x^{2\,025}+x)=-f(x)$，故 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 是奇函数，所以 $f(3x+y)=f(-x)$.

又易得 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 为 **R** 上的单调递增函数，故 $3x+y=-x$，所以 $4x+y=0$.故选 B.

课后素养评价(二十三)

基础落实

1.A　**解析**：对于 A，令 $y=f(x)$，则 $f(-x)=\frac{1}{x^2}=f(x)$，

是偶函数，且在区间$(0,+\infty)$上单调递减，故选项A正确；

对于B，令$y=f(x)$，则$f(-x)=|x|=f(x)$，是偶函数，但在区间$(0,+\infty)$上单调递增，故选项B错误；

对于C，令$y=f(x)$，则$f(-x)=3x^2-x+1$，是非奇非偶函数，故选项C错误；

对于D，令$y=f(x)$，则$f(-x)=-2x+1$，是非奇非偶函数，故选项D错误.故选A.

2.B　**3.**AB

4.$\begin{cases}-2x^2-x-1,x>0,\\0,x=0,\\2x^2-x+1,x<0\end{cases}$

5.解：(1)$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，$f(1)=-f(-1)=-(1-a)=4$，解得$a=5$.

(2)当$x<0$时，$f(x)=x^2+5x$，$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，

则当$x>0$时，$-x<0$，则$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+5(-x)]=-x^2+5x$，$x=0$时也满足，

所以$f(x)=\begin{cases}-x^2+5x,x\geqslant0,\\x^2+5x,x<0.\end{cases}$

(3)$f(x)=6$，即$\begin{cases}x\geqslant0,\\-x^2+5x=6\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\x^2+5x=6,\end{cases}$解得$x=2$或$x=3$或$x=-6$，

所以方程$f(x)=6$的解集为$\{-6,2,3\}$.

能力提升

1.B　**解析**：当$x<0$时，$f(x)=ax+2\ 026$，此时$-x>0$，$f(-x)=2\ 026(-x)+b=-2\ 026x+b$.

因为函数$f(x)$为奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$，所以$-2\ 026x+b=-(ax+2\ 026)$，

即$-2\ 026x+b=-ax-2\ 026$，则$a=2\ 026$，$b=-2\ 026$，所以$a+b=0$.故选B.

2.C　**解析**：因为$f(x)$为定义在$[-4,4]$上的偶函数，且$f(x+1)>f(-2)$，可得$f(|x+1|)>f(2)$，

且$f(x)$在$[0,4]$上为减函数，则$0\leqslant|x+1|<2$，解得$-3<x<1$，所以实数x的取值范围是$(-3,1)$.故选C.

3.x^2+1(答案不唯一)　**解析**：因为函数$y=x^2$是偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增，最小值为0，所以把函数$y=x^2$的图象向上平移一个单位长度即可满足题意最小值为1.

所以$f(x)=x^2+1$同时满足前面三个学生所说性质.

故答案为：x^2+1(答案不唯一).

自我超越

AD　**解析**：令$x=y=0$，则$f(0)f(0)+1=[f(0)]^2+[f(0)]^2$，所以$[f(0)]^2=1$，$f(0)=-1$，故选项A正确.

令$x=y$，则$f(2x)f(0)+1=2[f(x)]^2$，所以$-f(2x)+1=2[f(x)]^2$，故选项B错误.

赋x为y，y为x，则$f(y+x)f(y-x)+1=[f(y)]^2+[f(x)]^2$，

即$f(y+x)f(y-x)+1=f(x+y)f(x-y)+1$，

所以$f(y+x)f(y-x)=f(x+y)f(x-y)$.

若$f(y+x)=0$，则$f(x)=0$，与$f(0)=-1$不符，

所以$f(y+x)\neq0$，

于是$f(y-x)=f(x-y)$，即$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故选项C错误，选项D正确.故选AD.

课后素养评价(二十四)

基础落实

1.D　**解析**：由幂函数的定义可知$y=(x+1)^2$，$y=x+\frac{1}{x}$，$y=2x^3$均不是幂函数，$y=x^{\frac{1}{3}}$是幂函数.故选D.

2.A　**3.**AC

4.$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$

5.解：(1)设$f(x)=x^\alpha$，由题意，得$f(2)=2^\alpha=\frac{1}{8}$，即$\alpha=-3$.

故函数$f(x)$的解析式为$f(x)=x^{-3}$.

(2)因为$f(x)=x^{-3}$，所以要使函数$f(x)$有意义，则$x\neq0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

因为$f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$，

所以该幂函数为奇函数.

当$x>0$时，根据幂函数的性质可知，$f(x)=x^{-3}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

因为$f(x)$是奇函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递减.

故函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$.

能力提升

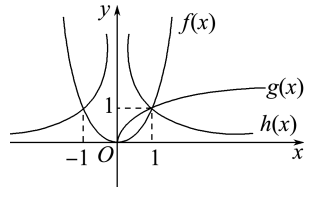
1.C　**解析**：因为函数$f(x)=(m^2-m-11)x^m$是幂函数，所以$m^2-m-11=1$，解得$m=-3$或$m=4$.

当$m=-3$时，$f(x)=x^{-3}$，$f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$，是奇函数；

当$m=4$时，$f(x)=x^4$，$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$，是偶函数.

所以$m=-3$.故选C.

2.D　**解析**：在同一坐标系中分别作出$h(x)$，$g(x)$和$f(x)$的图象，如图所示.



由图象可知，当$0<x<1$时，$h(x)>g(x)>f(x)$.

故选D.

3.x^2(答案不唯一)

4.(1)**解**：由题意，设$f(x)=x^\alpha$，则$\frac{1}{2}=4^\alpha=4^{-\frac{1}{2}}$，故$\alpha=-\frac{1}{2}$，所以$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$.

(2)**证明**:设任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1>x_2>0$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=\dfrac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1x_2}}$

$=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}$,

而 $x_2-x_1<0$,$\sqrt{x_1x_2}>0$,$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$,

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(3)**解**:函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,则函数 $f(x)$为非奇非偶函数.

自我超越

C　**解析**:因为幂函数 $f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbf{N}^*)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $m^2-2m-3<0$,即$(m-3)(m+1)<0$,解得$-1<m<3$.

因为 $m\in\mathbf{N}^*$,所以 m 的可能取值为 1,2.

因为幂函数 $f(x)$为偶函数,所以指数 m^2-2m-3 为偶数.

当 $m=1$ 时,$1^2-2\times1-3=-4$,是偶数,符合条件;

当 $m=2$ 时,$2^2-2\times2-3=-3$,是奇数,不符合条件.

所以 $m=1$,所以不等式为$(2a+1)^{-\frac{2}{3}}<(3-2a)^{-\frac{2}{3}}$①.

因为幂函数 $g(x)=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$的定义域为$\{x\mid x\neq0\}$,

且对于定义域内的任意 x,都有 $g(-x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=g(x)$,

所以幂函数 $g(x)=x^{-\frac{2}{3}}$是偶函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减.

所以①式可化为$\begin{cases}2a+1\neq0,\\3-2a\neq0,\\|2a+1|>|3-2a|\end{cases}$②,

将$|2a+1|>|3-2a|$两边平方,可得$(2a+1)^2>(3-2a)^2$,

即 $4a^2+4a+1>9-12a+4a^2$,即 $16a>8$,解得 $a>\dfrac{1}{2}$,

所以②式为$\begin{cases}a\neq-\dfrac{1}{2},\\a\neq\dfrac{3}{2},\\a>\dfrac{1}{2},\end{cases}$　解得 $a>\dfrac{1}{2}$且 $a\neq\dfrac{3}{2}$.故选 C.

课后素养评价(二十五)

基础落实

1.D

2.300　**解析**:每台机器人的平均成本为$\dfrac{P(x)}{x}=\dfrac{1}{300}x+1+\dfrac{300}{x}\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{300}x\cdot\dfrac{300}{x}}+1=3$,当且仅当$\dfrac{1}{300}x=\dfrac{300}{x}$,即 $x=300$ 时,等号成立.

因此应购买 300 台机器人,可使每台机器人的平均成本最低.

3.**解**:(1)由题意,得 $xy=3(x-y+15)$,

整理得 $y=3+\dfrac{36}{x+3}$.

由 $y>x>0$,得$3+\dfrac{36}{x+3}>x>0$,即$\begin{cases}x>0,\\x^2<45,\end{cases}$解得 $0<x<3\sqrt{5}$,

所以 y 关于 x 的函数解析式是 $y=3+\dfrac{36}{x+3}$,$0<x<3\sqrt{5}$.

(2)展牌的周长 $L=2x+2y=2x+6+\dfrac{72}{x+3}=2(x+3)+\dfrac{72}{x+3}\geqslant2\sqrt{2(x+3)\cdot\dfrac{72}{x+3}}=24$,

当且仅当 $2(x+3)=\dfrac{72}{x+3}$,即 $x=3$ 时取等号,此时 $y=3+\dfrac{36}{3+3}=9$,

所以设计展牌的长为 9 m、宽为 3 m 时,才能使展牌的周长最小,最小周长为 24 m.

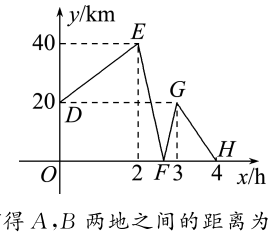
能力提升

1.BD　**解析**:甲容器下粗上细,水高变化为先逐渐变快,故甲应匹配④;乙容器为球形,水高变化为先逐渐变慢,再逐渐变快,故乙应匹配①;丙、丁容器都是柱形,水高变化的速度都应是不变的,但丙容器细,丁容器粗,故丙容器水高变化快,丁容器水高变化慢,丙应匹配③,丁应匹配②.故选 BD.

2.100　[60,100]　**解析**:设每小时的油耗为 y L,根据题意得 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-k+\dfrac{4\,500}{x}\right)$,则当 $x=120$ 时,$y=\dfrac{1}{5}\left(120-k+\dfrac{4\,500}{120}\right)=11.5$,解得 $k=100$,所以 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4\,500}{x}\right)$.若 $y\leqslant9$,即$\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4\,500}{x}\right)\leqslant9$,解得 $45\leqslant x\leqslant100$.又因为 $60\leqslant x\leqslant120$,所以 x 的取值范围为[60,100].

自我超越

ACD　**解析**:如图所示.



根据函数图象可得 A,B 两地之间的距离为 20 km,两车行驶了 4 小时,同时到达 C 地,故选项 A 正确,

$D-E$ 段:甲、乙同向行驶,甲在后追赶乙;

$E-F-G$ 段:乙休息,其中在 $E-F$ 段,甲在后追赶乙,在点 F 时甲、乙相遇,在 $F-G$ 段,甲超过乙的休息地继续行驶,乙车中途休息 1 h,故选项 B 错误;

$G-H$ 段：乙在后追赶甲，在点 H 时，甲、乙同时到达 C 地.

在 $E-F-G$ 段，乙休息，$v_{甲}=\frac{40+20}{1}=60(\mathrm{km/h})$，故选项 C 正确；

在 $D-E$ 段，$2v_{乙}+20-2v_{甲}=40$，解得 $v_{乙}=70(\mathrm{km/h})$，因为在点 E 时乙开始休息，当甲、乙相遇时，甲所需行驶里程为 $70\times2+20=160(\mathrm{km})$，

则甲、乙相遇时所用的时间 $t=\frac{160}{60}=\frac{8}{3}(\mathrm{h})$，故选项 D 正确.故选 ACD.

课后素养评价(二十六)

基础落实

1.BCD

2.C　**解析**：由题意 $\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{6}}$.故选 C.

3.B

4.9　**解析**：原式 $=1+(2^3)^{\frac{2}{3}}+2^2=1+4+4=9$.

5.解：$f\left(a+\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$.

因为 $0<a\leqslant1$，所以 $a\leqslant\frac{1}{a}$，故 $f\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-a$.

能力提升

1.C　**解析**：原式可化为 $1-a+|2-a|$.因为 $1<a<2$，则 $2-a>0$，所以原式 $=1-a+2-a=3-2a$.故选 C.

2.B　**解析**：$a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=a\sqrt{-\frac{ab}{a^2}}+b\sqrt{-\frac{ab}{b^2}}$

$=\frac{a}{|a|}\sqrt{-ab}+\frac{b}{|b|}\sqrt{-ab}=\left(\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}\right)\sqrt{-ab}$.

因为 $ab<0$，所以 a，b 异号，$a|b|+|a|b=0$，所以 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=\frac{a|b|+|a|b}{|a||b|}=0$，

所以 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=0$.故选 B.

3.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　**解析**：将分数指数幂化为根式，可知需满足 $1-2x>0$，解得 $x<\frac{1}{2}$.

4.$a-1$　**解析**：由 $\sqrt[4]{(a-1)^4}+1=a$，

即 $|a-1|=a-1$，知 $a\geqslant1$.

所以原式 $=a-1+(a-1)+(1-a)=a-1$.

5.解：(1) 原式 $=\frac{a^{\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=a^{-1}=\frac{1}{a}=\sqrt{2}$.

(2) 由题意，$a>0$，$b>0$，所以 $[a^{-\frac{3}{2}}b^2(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}]^2=(a^{-2}b^3)^2=a^{-4}b^6$.

又 $a=2^{-\frac{1}{2}}$，$b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$，

所以原式 $=(2^{-\frac{1}{2}})^{-4}\cdot(2^{-\frac{1}{3}})^6=2^2\cdot2^{-2}=1$.

自我超越

1.B　**解析**：由题意可得 $(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=a$，$\sqrt[n]{a^n}=-a$，故 n 为偶数且 $a<0$.

2.$\frac{3}{2}$　**解析**：因为 $a^m=9$，$a^n=2$，所以 $a^{m-2n}=\frac{a^m}{a^{2n}}=\frac{9}{4}$，所以 $\sqrt{a^{m-2n}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

课后素养评价(二十七)

基础落实

1.B　**解析**：$\sqrt{\frac{a^3\times b^{-2}}{a^{-1}\times b^4}}=\sqrt{\frac{a^4}{b^6}}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2}=\left|\frac{a^2}{b^3}\right|=\frac{a^2}{b^3}$.故选 B.

2.C　**3.**C

4.$\pm\sqrt{3}$　**解析**：因为 $a+a^{-1}=5$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=3$，所以 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{3}$.

5.1　**6.**$\frac{1}{3}$

能力提升

1.AC　**解析**：对于 A，$a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$，故 A 正确；

对于 B，$\sqrt[4]{(-5)^4}=5$，故 B 错误；

对于 C，$(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=6^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=6^2=36$，故 C 正确；

对于 D，$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$，故 D 错误.故选 AC.

2.3　**解析**：由 $29=16+8+4+1=2^4+2^3+2^2+2^0$，可得“国”字所对应的数字为 3.

3.$\{-1,2\}$　**解析**：令 $t=2^x$，则 $t>0$，

方程可化为 $2t^2-9t+4=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=4$，

所以，$2^x=\frac{1}{2}$ 或 $2^x=4$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$.

所以，方程的解集为 $\{-1,2\}$.

故答案为 $\{-1,2\}$.

4.2　**解析**：$10^{\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}\alpha}=(10^{\beta})^{\frac{3}{4}}\times(10^{\alpha})^{\frac{1}{2}}=(32^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}\times(2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{5\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}}=2^1=2$.

5.解：(1) 因为 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=4$，

所以 $a+\frac{1}{a}-2=16$，

即 $a+\frac{1}{a}=18$.所以 $a+a^{-1}=a+\frac{1}{a}=18$.

(2) 由(1)知 $a+\frac{1}{a}=18$，因为 $a>0$，所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$.

所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2}=\sqrt{a+a^{-1}+2}=\sqrt{18+2}=2\sqrt{5}$.

自我超越

1. $3^{\frac{1}{2}}$　**解析**：因为$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}=-3$，$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$8^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$，所以$3^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{4}\right)^{0}>8^{-\frac{2}{3}}>\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$，所以最大的数是$3^{\frac{1}{2}}$.

2. **解**：(1) $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2+2^{\frac{2}{3}}}+\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2+2^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}+1}+\frac{2^{\frac{1}{3}}}{1+2^{\frac{1}{3}}}=1$.

$f(3)+f(-2)=\frac{2^{6}}{2+2^{6}}+\frac{2^{-4}}{2+2^{-4}}=\frac{2^{6}}{2+2^{6}}+\frac{1}{2^{5}+1}=\frac{2^{6}}{2+2^{6}}+\frac{2}{2^{6}+2}=1$.

(2) $f(x)+f(1-x)=\frac{2^{2x}}{2+2^{2x}}+\frac{2^{2(1-x)}}{2+2^{2(1-x)}}=\frac{4^{x}}{2+4^{x}}+\frac{4^{1-x}}{2+4^{1-x}}=\frac{4^{x}}{2+4^{x}}+\frac{4}{2\cdot 4^{x}+4}=\frac{4^{x}}{2+4^{x}}+\frac{2}{4^{x}+2}=\frac{4^{x}+2}{2+4^{x}}=1$.

(3)由(2)知原式$=49\times 1+f\left(\frac{1}{2}\right)=49+\frac{1}{2}=\frac{99}{2}$.

课后素养评价(二十八)

基础落实

1.D　**2.**C　**3.**C

4. $\left\{a\,\middle|\,a>\frac{3}{2}\text{，且 }a\neq 2\right\}$　**解析**：因为函数 $y=(2a-3)^{x}$ 是指数函数，所以$\begin{cases}2a-3>0,\\2a-3\neq 1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a>\frac{3}{2},\\a\neq 2.\end{cases}$

5. **解**：设 $f(x)=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$，

因为 $f(3)=\pi$，所以 $a^{3}=\pi$，解得 $a=\pi^{\frac{1}{3}}$，

所以 $f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}$.

所以 $f(0)=\pi^{0}=1$，$f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}$，$f(-3)=\pi^{-1}=\frac{1}{\pi}$.

能力提升

1.D　**解析**：因为 $f(x)=2^{x}$，所以 $f(mn)=2^{mn}$，而 $f(m)f(n)=2^{m}\cdot 2^{n}=2^{m+n}=f(m+n)$，故选项 A，B 错误，选项 D 正确；$f(m+n)=2^{m+n}$，$f(m)+f(n)=2^{m}+2^{n}$，故选项 C 错误.故选 D.

2.ACD　**解析**：由题图可知，函数 $y=a^{t}$ 的图象经过(1，2)，即 $a^{1}=2$，则 $a=2$，所以 $y=2^{t}$.

又 $2^{t+1}-2^{t}=2^{t}$ 不是常数，则蓝藻每个月的面积是上个月的 2 倍，则每个月的增长率为 100%，A 正确，B 错误；当 $t=6$ 时，$y=2^{6}=64>60$，C 正确；

若蓝藻面积蔓延到 2 m^{2}，3 m^{2}，6 m^{2} 所经过的时间分别是 t_{1}，t_{2}，t_{3}，则 $2^{t_{1}}=2$，$2^{t_{2}}=3$，$2^{t_{3}}=6$，则 $2^{t_{1}}\cdot 2^{t_{2}}=2\times 3$，即 $2^{t_{1}+t_{2}}=6=2^{t_{3}}$，所以 $t_{1}+t_{2}=t_{3}$，D 正确.故选 ACD.

3.1 000　**解析**：设 7.5 级地震释放的能量为 E_{1} J，5.5 级地震释放的能量为 E_{2} J，

因为 $E_{1}=10^{4.8+1.5\times 7.5}=10^{16.05}$，$E_{2}=10^{4.8+1.5\times 5.5}=10^{13.05}$，

所以$\frac{E_{1}}{E_{2}}=1\,000$，

即 7.5 级地震释放的能量是 5.5 级地震释放的能量的 1 000倍.

自我超越

$f(x)=2\times 4^{x}$(答案不唯一)　**解析**：由题意，得$\frac{f(1)}{f(0)}=4$，$\frac{f(2)}{f(0)}=4^{2}$，…，$\frac{f(x)}{f(0)}=4^{x}$，所以 $f(x)=2\times 4^{x}$.

课后素养评价(二十九)

基础落实

1.B　**2.**D

3.B　**解析**：任何一个指数函数的图象都过定点(0，1)，图象②不过定点(0，1).故选 B.

4.AD

5. **解**：(1)因为 $0<\frac{2}{5}<1$，所以函数 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ 在 **R** 上单调递减.

又 $0.3<\pi$，所以$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$.

(2)因为$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<1$，$2^{\frac{3}{2}}>1$，

所以$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<2^{\frac{3}{2}}$.

(3)函数 $y=x^{0.3}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

由$\frac{2}{5}>0.3$，可得$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{0.3}$①.

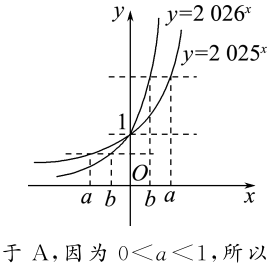
又函数 $y=0.3^{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，

所以 $0.3^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$②.

由①②知$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$.

能力提升

1.ABD　**解析**：如图，观察易知，$a<b<0$ 或 $0<b<a$ 或 $a=b=0$.



2.CD　**解析**：对于 A，因为 $0<a<1$，所以函数 $f(x)=a^{x}$ 为减函数，又 $a<b$，所以 $a^{a}>a^{b}$，故选项 A 错误；对于 B，因为 $0<b<1$，所以函数 $f(x)=b^{x}$ 为减函数，又 $0<a<b$，所以 $b^{a}>b^{b}$，故选项 B 错误；对于 C，因为 $a>0$，所以函数 $f(x)=x^{a}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $0<a<b$，所以 $a^{a}<b^{b}$，故选项 C 正确；对于 D，因为 $b>0$，所以函数 $f(x)=x^{b}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $0<a<b$，所以 $b^{b}>a^{b}$，故选项 D 正确.故选 CD.

3.$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　**解析**：由 $4^x-3\cdot2^x+2>0$ 可得 $(2^x-1)(2^x-2)>0$，可得 $2^x<1=2^0$ 或 $2^x>2$.

又因为函数 $y=2^x$ 为 **R** 上的增函数，则有 $x<0$ 或 $x>1$，故原不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

自我超越

A　**解析**：函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)$.

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 单调递减，

由 $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$，可得 $f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{3}\right)$，

即 $f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$.故选 A.

课后素养评价(三十)

基础落实

1.D　**2.**A

3.$\left(0,\frac{1}{16}\right]$　**解析**：令 $g(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant2$，所以 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$. 又 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}>0$，所以函数的值域为 $\left(0,\frac{1}{16}\right]$.

4.解：(1)因为指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象经过点 $(-3,27)$，

所以 $a^{-3}=27$，所以 $a=\frac{1}{3}$，所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

所以 $f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$.

(2)因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减，

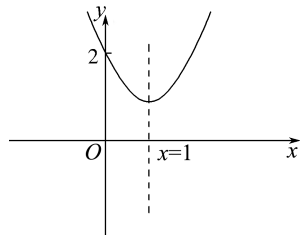
所以原不等式等价于 $x-1<-x$，解得 $x<\frac{1}{2}$，即 x 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

能力提升

1.D　**解析**：当 $0<a<1$ 时，当 $x>2$ 时，$f(x)$ 的值域为 $(0,a^2)$，与值域为 $[4,+\infty)$ 矛盾，所以 $0<a<1$ 不成立.当 $a>1$ 时，对于函数 $f(x)=6-x$，$x\leqslant2$，函数的值域为 $[4,+\infty)$，所以只需当 $x>2$ 时，a^x 的值域为 $[4,+\infty)$ 的子集即可，即 $a^2\geqslant4$，解得 $a\geqslant2(a\leqslant-2$ 舍去).

综上可知，a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

2.C　**解析**：作出 $f(x)$ 的图象，如图所示.



该函数在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且图象关于直线 $x=1$ 对称.因为 $a<b<1$，且 $a+c>2$，所以 $f(2-a)=f(a)>f(b)$，而 $c>2-a>1$，

故 $f(c)>f(2-a)$，

所以 $f(b)<f(a)<f(c)$.

3.$[4,8)$　**解析**：由 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，

知 $\begin{cases}a>1,\\4-\frac{a}{2}>0,\\a^1\geqslant\left(4-\frac{a}{2}\right)\times1+2,\end{cases}$ 解得 $a\in[4,8)$.

自我超越

B　**解析**：对于 A，根据题意知，$f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$.因为 $g(2)=[f(2)]=\left[\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^2}\right]=2$，$g(-2)=[f(-2)]=\left[\frac{2e^{-2}}{1+e^{-2}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{e^2+1}+\frac{1}{2}\right]=0$，所以 $g(2)\neq g(-2)$，所以函数 $g(x)$ 不是偶函数，故 A 错误.对于 B，因为 $y=1+e^x$ 在 **R** 上是增函数，所以 $y=\frac{2}{1+e^x}$ 在 **R** 上是减函数，则 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$ 在 **R** 上是增函数，故 B 正确.对于 C，因为 $e^x>0$，所以 $1+e^x>1$，$0<\frac{2}{1+e^x}<2$，$-2<-\frac{2}{1+e^x}<0$，所以 $\frac{1}{2}<f(x)<\frac{5}{2}$，即 $f(x)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，故 C 错误.对于 D，因为 $f(x)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，所以 $g(x)$ 的值域是 $\{0,1,2\}$，故 D 错误.

课后素养评价(三十一)

基础落实

1.D　**解析**：$\log_3a=2$，则 $a=3^2=9$.故选 D.

2.ACD　**解析**：对于 A，$10^0=1$，化为对数式是 $\lg1=0$，选项 A 正确；对于 B，$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$，化为对数式是 $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，所以选项 B 错误；对于 C，$\log_39=2$，化为指数式是 $3^2=9$，选项 C 正确；对于 D，$\log_55=1$，化为指数式是 $5^1=5$，选项 D 正确.故选 ACD.

3.AC

4.D **解析**：根据题意，$M=\log_{(a-3)}(10-2a)$ 中，有 $\begin{cases}a-3>0,\\a-3\neq1,\\10-2a>0,\end{cases}$ 解得 $3<a<4$ 或 $4<a<5$，即实数 a 的取值范围为 $(3,4)\cup(4,5)$.故选 D.

5. $\frac{10}{3}$ **6.** $\frac{1}{4}$

能力提升

1.A **解析**：因为 $2^{\log_3 x}=2^{-2}$，

所以 $\log_3 x=-2$，所以 $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

2.AB **解析**：因为 $\lg 10=\ln e=1$，$\ln(\lg 10)=\ln 1=0$，$\ln(\ln e)=\ln 1=0$，所以 A，B 均正确；C 中，若 $e=\ln x$，则 $x=e^e$，故 C 错误；D 中，$\lg 1=0$，而 $\ln 0$ 没有意义，故 D 错误.故选 AB.

3.D **解析**：因为 $\log_4 5=2m$，所以 $m=\log_4\sqrt{5}$，所以 $4^m=4^{\log_4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

4.解：(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}4}$

$=2\times4$

$=8$.

(2)$2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$

$=2^3\times2^{\log_2 3}+\frac{3^2}{3^{\log_3 9}}$

$=8\times3+\frac{9}{9}$

$=25$.

自我超越

1.D **解析**：因为 $\ln x=6$，$\ln y=3$，所以 $x=e^6$，$y=e^3$，所以 $\frac{x}{y}=\frac{e^6}{e^3}=e^3$.故选 D.

2. -1 **解析**：设 $\log_a b=\log_b a=k$，

则 $b=a^k$，$a=b^k$，

所以 $b=(b^k)^k=b^{k^2}$.

因为 $b>0$，且 $b\neq1$，所以 $k^2=1$，

即 $k=\pm1$.当 $k=-1$ 时，$a=\frac{1}{b}$，$\log_a b=-1$.

当 $k=1$ 时，$a=b$，舍去.

综上可知，$\log_a b=-1$.

课后素养评价(三十二)

基础落实

1.A **2.C**

3.B **解析**：因为 $a\log_3 4=2$，则 $\log_3 4^a=2$，则 $4^a=3^2=9$，则 $4^{-a}=\frac{1}{4^a}=\frac{1}{9}$.故选 B.

4. 1 **解析**：$\frac{1}{\log_3 21}+\frac{1}{\log_7 21}=\log_{21}3+\log_{21}7=\log_{21}21=1$.

5.解：(1)原式$=\frac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}$

$=\frac{\left(1+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\frac{11}{5}$.

(2)原式$=\frac{\log_2\frac{25}{9}}{\log_2 4}+\log_2 3-\frac{\log_2\frac{1}{5}}{\log_2 0.5}$

$=\log_2\frac{5}{3}+\log_2 3-\log_2 5=\log_2\left(\frac{5}{3}\times3\div5\right)=\log_2 1=0$.

(3)原式$=(2\log_{2^2}3+\log_{2^3}3)\cdot(\log_3 2+\log_{3^2}2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\log_2 3\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)=2$.

能力提升

1.C **解析**：因为 $\lg a=-\lg b$，所以 $\lg a+\lg b=0$，

所以 $\lg(ab)=0$，所以 $ab=1$.故选 C.

2.D **解析**：由 $6^x=25$，$5^y=6$，得 $x=\log_6 25$，$y=\log_5 6$，所以 $xy=\log_6 25\times\log_5 6=\frac{\ln 25}{\ln 6}\times\frac{\ln 6}{\ln 5}=2$.故选 D.

3.C **解析**：因为 $2^a=5^b=10$，所以 $a=\log_2 10$，$b=\log_5 10$，$\frac{a}{b}=\frac{\log_2 10}{\log_5 10}=\frac{\lg 5}{\lg 2}=\log_2 5$，则 $2^{\frac{a}{b}}=2^{\log_2 5}=5$.

4. 1 **解析**：原式

$=\frac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+\log_6\frac{6}{3}\times\log_6(6\times3)}{\log_6 4}$

$=\frac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+1-(\log_6 3)^2}{\log_6 4}$

$=\frac{2(1-\log_6 3)}{2\log_6 2}=\frac{\log_6 6-\log_6 3}{\log_6 2}$

$=\frac{\log_6 2}{\log_6 2}=1$.

自我超越

(1)**解**：设 $3^x=4^y=6^z=k$(显然 $k>1$)，

则 $x=\log_3 k$，$y=\log_4 k$，$z=\log_6 k$.

由 $2x=py$，

得 $2\log_3 k=p\log_4 k=p\cdot\frac{\log_3 k}{\log_3 4}$.

因为 $\log_3 k\neq0$，

所以 $p=2\log_3 4=4\log_3 2$.

(2)**证明**：$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_6 k}-\frac{1}{\log_3 k}$

$=\log_k 6-\log_k 3=\log_k 2=\frac{1}{2}\log_k 4=\frac{1}{2y}$.

课后素养评价(三十三)

基础落实

1.B **解析**：形如 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$的函数为对数函数，符合此形式的函数解析式有②③，其他的均不符合.故选 B.

2.B

3.解：设 $y=f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，

则 $2=\log_a 4$，故 $a=2$，即 $f(x)=\log_2 x$.

因此 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$，$f(2^{\lg 2})=\log_2 2^{\lg 2}=\lg 2$.

4.解：(1)由 $f(x)=0$，即 $10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}=0$，

得 $x=1\times 10^{-12}$.

因此等级为 0 dB 的声音强度为 1×10^{-12}.

(2)设 $f(x_1)=90$，则 $10\lg\frac{x_1}{1\times 10^{-12}}=90$.

解得 $x_1=10^{-3}$.

设 $f(x_2)=60$，

同理，得 $x_2=10^{-6}$.

因此所求强度之比为 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{10^{-3}}{10^{-6}}=1\ 000:1$.

能力提升

1.D **解析**：$f(x)=\log_3(x^2-1)$，则 $x^2-1>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$.故选 D.

2.C **解析**：设 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，由 $f(\sqrt[3]{4})=-\frac{2}{3}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

所以 $f(\sqrt{2})=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$.

3.解：(1)已知碳 14 含量与死亡年数成指数函数关系.

设 $P=a^t$，由碳 14 经过 5 730 年衰减为原来的一半，可得 $\frac{1}{2}=a^{5\ 730}$.

故碳 14 的含量 P 与死亡年数 t 的函数关系式为 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 730}}$.

(2)由题意得 $\frac{t}{5\ 730}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{100}=\frac{\lg\frac{8}{100}}{\lg\frac{1}{2}}=\frac{\lg 8-\lg 100}{-\lg 2}=\frac{2-3\lg 2}{\lg 2}\approx\frac{11}{3}$，

解得 $t\approx 5\ 730\times\frac{11}{3}=21\ 010$.

所以推算该生物死亡的年代距今 21 010 年.

自我超越

$f(x)=\lg x$(答案不唯一)

课后素养评价(三十四)

基础落实

1.B **解析**：函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过点 $P(m,n)$，令 $4x-7=1$，解得 $x=2$.又 $f(2)=\log_a(4\times 2-7)-3=-3$，所以函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过点 $(2,-3)$，即 $m=2$，$n=-3$，所以 $m+n=-1$.故选 B.

2.B **解析**：因为 $a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，$b=2^{0.2}>2^0=1$，$0<c=0.2^{0.3}<0.2^0=1$，所以 $a<c<b$.故选 B.

3.3 **4.**$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

5.解：(1)因为 $\log_2 x>4=\log_2 16$，且 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x>16$.

故实数 x 的取值范围为 $\{x\mid x>16\}$.

(2)若 $\log_2(2x)<\log_2(x+1)$，则 $\begin{cases}2x>0,\\ x+1>0,\\ 2x<x+1,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$.

故 x 的取值范围为 $(0,1)$.

能力提升

1.C **解析**：因为函数 $f(x)=\log_5 x$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，故 $g(x)=5^x$，故 $f(1)+g(1)=\log_5 1+5^1=5$.故选 C.

2.BD **解析**：因为函数 $y=\log_{0.2}x$ 是减函数，所以 $\log_{0.2}0.3>\log_{0.2}0.4$，故 A 错误；

因为 $2^{0.3}>2^0=1$，$\log_3 2<\log_3 3=1$，所以 $2^{0.3}>\log_3 2$，故 B 正确；

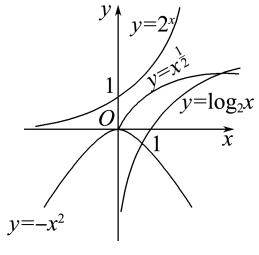
因为 $\log_3 e<\log_3 3=1$，$\ln 3>1$，所以 $\log_3 e<\ln 3$，故 C 错误；

因为 $\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}$，$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}$，且 $1>\lg 5>\lg 3>\lg 2>0$，所以 $\log_2 5>\log_3 5$，故 D 正确.

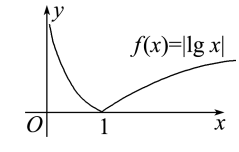
3.D **解析**：由图可知，函数 $y=\log_a(x+c)$ 在定义域内单调递减，故 $0<a<1$；又函数 $y=\log_a(x+c)$ 的图象是由函数 $y=\log_a x$ 的图象向左平移 c 个单位长度得到，所以 $0<c<1$.故选 D.

自我超越

1.BCD **解析**：由题意知，若函数 $f(x)$ 为凸函数，则在函数 $y=f(x)$ 的图象上任取两个不同的点 A，B，线段 AB(原点除外)总在 $f(x)$ 图象的下方.分别作出四个函数的图象，如图所示.观察各函数在定义域上的图象，知 $y=\log_2 x$，$y=-x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 是凸函数.故选 BCD.



2.解：先作出函数 $y=\lg x$ 的图象，再将图象位于 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方，得到 $f(x)=|\lg x|$ 的图象，如图所示.由图象可知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.



由 $\frac{1}{c}>a>b>1$，得 $f\left(\frac{1}{c}\right)>f(a)>f(b)$.

又 $f\left(\frac{1}{c}\right)=\left|\lg\frac{1}{c}\right|=|-\lg c|=|\lg c|=f(c)$.

所以 $f(c)>f(a)>f(b)$.

课后素养评价(三十五)

基础落实

1.B　**解析**:由题意得,$\log_{0.5}(x-1)\geqslant 0$,即 $0<x-1\leqslant 1$,解得 $1<x\leqslant 2$,故函数 (x) 的定义域是 $(1,2]$.故选 B.

2.D　**解析**:由 $x^2-2x-8>0$,得 $x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.令 $t=x^2-2x-8$,则 $y=\ln t$.因为 $x\in(-\infty,-2)$ 时,$t=x^2-2x-8$ 单调递减;$x\in(4,+\infty)$ 时,$t=x^2-2x-8$ 单调递增.又 $y=\ln t$ 为定义域内的增函数,故函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是 $(4,+\infty)$.故选 D.

3.B

4.$[-1,2)$　**解析**:因为 $\log_2(2-x)\leqslant\log_2(3x+6)$,所以 $\begin{cases}2-x>0,\\3x+6>0,\\3x+6\geqslant 2-x,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<2$.故原不等式的解集为 $[-1,2)$.

5.解:(1)函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2$,

因为 $f(x)>0$,即 $\log_2(x+1)-2>0$,

所以 $\log_2(x+1)>2$,所以 $x+1>4$,所以 $x>3$.

故 x 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

(2)因为 $x\in(-1,3]$,所以 $x+1\in(0,4]$,所以 $\log_2(x+1)\in(-\infty,2]$,

所以 $\log_2(x+1)-2\in(-\infty,0]$.

故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

能力提升

1.C　**解析**:令 $g(x)=x^2-ax+1(a>0,$ 且 $a\neq 1)$,$g(x)$ 的图象开口向上.

①当 $a>1$ 时,$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正,所以 $\Delta=a^2-4<0$,解得 $1<a<2$;

②当 $0<a<1$ 时,x^2-ax+1 不能使函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值,不符合题意.综上所述,$1<a<2$.

2.D

3.解:(1)因为 $f(1)=2a=2$,$f(2)=4a+b\ln 2=4+\ln 2$,

所以 $a=1$,$b=1$.

(2)由(1)可知,$f(x)=2^x+\ln x$,由 $y=2^x$,$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内均单调递增,

易知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}+\ln\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\ln 2$,

最大值为 $f(4)=2^4+\ln 4=16+2\ln 2$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 上的值域为 $[\sqrt{2}-\ln 2,16+2\ln 2]$.

自我超越

B　**解析**:因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x+\ln(x+1)$ 单调递增,

则需满足 $\begin{cases}-\frac{-2a}{2\times(-1)}\geqslant 0,\\-a\leqslant e^0+\ln 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$,

即 a 的取值范围是 $[-1,0]$.故选 B.

课后素养评价(三十六)

基础落实

1.B　**解析**:$y=e^x$,$y=x^{100}$,$y=2^x$,随着 x 的增大,函数值的增长速度越来越快,$y=\ln x$ 随着 x 的增大,函数值的增长速度越来越慢.故选 B.

2.D

3.D　**解析**:根据 $x=0.50$,$y=-1.01$,代入计算,可以排除 A;根据 $x=2.01$,$y=0.98$,代入计算,可以排除 B,C;

将各数据代入函数 $y=\log_2 x$,可知符合题意.

能力提升

1.A　**解析**:根据已知所给的关系图,观察得到图象在第一象限,且从左到右图象是上升的,并且增长速度越来越快,根据四个选项中函数的增长趋势可得,用指数函数拟合最好.

2.D　**解析**:由题意可得 $x=0$ 时,$y=192$,$x=22$ 时,$y=48$,代入 $y=e^{kx+b}$ 可得 $e^b=192$,$e^{22k+b}=48$,即有 $e^{11k}=\frac{1}{2}$,则当 $x=33$ 时,$y=e^{33k+b}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 192=24$.故选 D.

自我超越

解:(1)依题意,$100-45a^2=95$,即 $a^2=\frac{1}{9}$.

又 $a>0$,所以 $a=\frac{1}{3}$.

(2)当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时,$F=f(x)=-\frac{7}{8}x+120$ 单调递减,F 最大为 $f(40)=85$,故 $F>95$ 的解集为空集;

当 $0<x<40$ 时,由 $100-45\times\left(\frac{1}{3}\right)^x>95$,解得 $x>2$,即 $2<x<40$,

所以,若交通流量 $F>95$,则道路密度 x 的取值范围为 $(2,40)$.

(3)依题意,$q=F\cdot x=\begin{cases}\left[100-45\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]\cdot x,0<x<40,\\-\frac{7}{8}x^2+120x,40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$

所以,当 $0<x<40$ 时,$q<100\cdot x<4\ 000$;

当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时,$q=-\frac{7}{8}\left(x-\frac{480}{7}\right)^2+\frac{28\ 800}{7}\leqslant\frac{28\ 800}{7}$.

由于 $40<\frac{480}{7}<80$,所以,当 $x=\frac{480}{7}$ 时,q 取得最大值 $\frac{28\ 800}{7}$.

因为 $\frac{28\ 800}{7}>4\ 000$,所以车辆密度 q 的最大值为 $\frac{28\ 800}{7}$.

课后素养评价(三十七)

基础落实

1.A

2.C　**解析**:因为函数 $f(x)=\ln x+2x-3$ 在$(0,+\infty)$上连续且单调递增,且$\begin{cases}f(1)=-1<0,\\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}>0,\end{cases}$所以函数 $f(x)$ 的零点在区间$\left(1,\frac{3}{2}\right)$内.故选 C.

3.C　**解析**:函数 $f(x)=12-x-\lg x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且在$(0,+\infty)$上单调递减.易得 $f(11)=12-11-\lg 11=1-\lg 11<0$,$f(10)=12-10-\lg 10=1>0$,所以 $f(11)f(10)<0$,根据函数零点存在定理及其单调性,可得函数 $f(x)$的唯一零点所在区间为$(10,11)$,所以 $n=10$.故选 C.

4.$(0,2)$

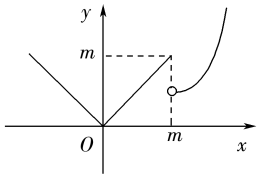
5.**解**:因为-1 和 2 是函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的零点,
所以-1 和 2 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数解,
所以$-1+2=-a$,$-1\times2=b$,即 $a=-1$,$b=-2$,
所以 $g(x)=-x^3-2x+4$.
因为 $g(1)=1$,$g(2)=-8$,$g(1)g(2)<0$,且 $g(x)$在$(1,2)$上的图象是连续不断的,
所以 $g(x)$在区间$(1,2)$内有零点.
又因为 $g(x)$在 **R** 上是单调函数,
所以 $g(x)$只有一个零点.
综上可知,函数 $g(x)$的零点所在的大致区间为$(1,2)$.

能力提升

1.B　**解析**:因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^3-2$ 在区间$(-1,0)$内连续且单调递减,又 $f(0)=-1<0$,$f(-1)=1>0$,
根据函数零点存在定理可得,$f(x)$在$(-1,0)$内有 1 个零点.故选 B.

2.C　**解析**:函数 $f(x)=x+\lg x$ 的定义域为$\{x\mid x>0\}$,函数是增函数,满足 $f(a)f(b)f(c)<0(a<b<c)$,说明 $f(a)$,$f(b)$,$f(c)$,有 1 个负数和 2 个正数或 3 个负数,$f(a)$一定是负数.由函数的零点存在定理可知,函数的零点可能在(a,c),或(a,b),或$(c,+\infty)$,不可能在(b,c).

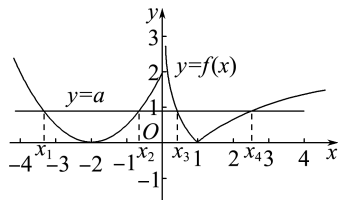
3.$(3,+\infty)$　**解析**:由题意知方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根,即直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$的图象有三个不同的交点.
作出函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m\end{cases}$的图象,如图所示.



若存在实数 b,使方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根,则 $m>-m^2+4m$,即 $m^2-3m>0$.
又因为 $m>0$,所以 $m>3$,即 m 的取值范围为$(3,+\infty)$.

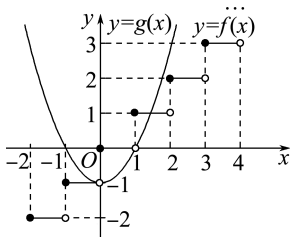
自我超越

1.BC　**解析**:由函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+2,x\leqslant0,\\ |\ln x|,x>0,\end{cases}$作出函数 $y=f(x)$的图象,如图所示.



因为关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,
结合图象,可得$-4\leqslant x_1<-2<x_2\leqslant0<x_3<1<x_4$,且 $x_1+x_2=-4$,
则 $x_1x_2=x_1(-4-x_1)=-x_1^2-4x_1=-(x_1+2)^2+4$,其中$-4\leqslant x_1<-2$,所以 $x_1x_2<4$,所以 A 不正确.
根据图象,要使得方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解,可得 $0<a\leqslant2$,所以 B 正确.
因为 $0<x_3<1<x_4$,且$|\ln x_3|=|\ln x_4|$,可得$-\ln x_3=\ln x_4$,
所以 $\ln x_3+\ln x_4=\ln(x_3x_4)=0$,可得 $x_3x_4=1$.
又由 $x_3+x_4\geqslant2\sqrt{x_3x_4}=2$,当且仅当 $x_3=x_4=1$ 时,等号成立,
显然 $x_3\neq x_4$,所以 $x_3+x_4>2$,所以 C 正确.
令 $a=\ln x_4=2$,可得 $x_4=e^2$,结合图象,可得 $1<x_4\leqslant e^2$,所以 D 不正确.故选 BC.

2.$\sqrt{2}$　**解析**:函数 $f(x)=x^2-[x]-1$ 的零点即方程$x^2-[x]-1=0$ 的根,也就是函数 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=[x]$图象的交点横坐标,画出函数 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=[x]$的图象如图所示.



由图可知,两函数的图象只有一个交点,令$x^2-1=1$,解得 $x=\sqrt{2}$或 $x=-\sqrt{2}$(舍去).

课后素养评价(三十八)

基础落实

1.B　**解析**:对于 A,$f(x)=3x+1$ 是单调函数,有唯一零点,且函数值在零点两侧异号,可用二分法求零点;对于 B,$f(x)=x^2$ 不是单调函数,虽然也有唯一的零点,但函数值在零点两侧都是正号,故不能用二分法求零点;对于

C，$f(x)=x^3$是单调函数，有唯一零点，且函数值在零点两侧异号，可用二分法求零点；对于D，$f(x)=\ln x$是单调函数，有唯一零点，且函数值在零点两侧异号，可用二分法求零点.故选B.

2.C　**解析**：因为$f(0)<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，所以零点所在的区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，再计算$f\left(\frac{1}{4}\right)$的符号.故选C.

3.AB

能力提升

1.ABD　**解析**：由二分法的步骤可知，(1)零点在(0,4)内，则有$f(0)\cdot f(4)<0$，不妨设$f(0)>0$，$f(4)<0$，取中点2；(2)零点在(0,2)内，则有$f(0)\cdot f(2)<0$，则$f(0)>0$，$f(2)<0$，取中点1；(3)零点在(1,2)内，则有$f(1)\cdot f(2)<0$，则$f(1)>0$，$f(2)<0$，取中点$\frac{3}{2}$；(4)零点在$\left(1,\frac{3}{2}\right)$内，则有$f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，则$f(1)>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，取中点$\frac{5}{4}$；(5)零点在$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$内，则有$f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，则$f\left(\frac{5}{4}\right)>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，所以与$f(0)$符号不同的是$f(4)$，$f(2)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

2.AD　**解析**：因为第一次所取的区间是$[-2,4]$，所以第二次所取的区间可能为$[-2,1]$，$[1,4]$，所以第三次所取的区间可能为$\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$，$\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$\left[1,\frac{5}{2}\right]$，$\left[\frac{5}{2},4\right]$.

3.4　**解析**：开区间(2,3)的长度等于1，每经过一次操作，区间长度变为原来的一半，经过n次操作后，区间长度变为$\frac{1}{2^n}$，故有$\frac{1}{2^n}\leqslant 0.1$，即$2^n\geqslant 10$，则$n\geqslant 4$，所以至少需要操作4次.

4.解：设$f(x)=x^2-2x-1$.因为$f(2)=-1<0$，$f(3)=2>0$，

所以在区间(2,3)内，方程$x^2-2x-1=0$有一解，记为x_0.

取2与3的平均数2.5.

因为$f(2.5)=0.25>0$，所以$2<x_0<2.5$；

再取2与2.5的平均数2.25.

因为$f(2.25)=-0.437\,5<0$，所以$2.25<x_0<2.5$；

如此继续下去，有

$f(2.375)<0$，$f(2.5)>0\Rightarrow x_0\in(2.375,2.5)$；

$f(2.375)<0$，$f(2.437\,5)>0\Rightarrow x_0\in(2.375,2.437\,5)$.

因为$|2.375-2.437\,5|=0.062\,5<0.1$，

所以方程$x^2-2x=1$的一个精确度为0.1的近似解可取为2.437 5.

自我超越

1.B　**解析**：因为依次确定了零点所在区间为$[a,b]$，$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[a+\frac{1}{3},\frac{b}{3}\right]$，可得$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=\frac{b}{3},\\ \frac{\frac{a+b}{2}+a}{2}=a+\frac{1}{3},\end{cases}$即

$\begin{cases}3a+b=0,\\ b-a=\frac{4}{3},\end{cases}$解得$a=-\frac{1}{3}$，$b=1$.

所以$b-a=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.故选B.

2.3　**解析**：先将12枚硬币平均分成两份，放在天平上，假币在轻的那6枚硬币里面；再将这6枚平均分成两份，则假币一定在轻的那3枚硬币里面；最后将这3枚硬币任拿出2枚放在天平上，若平衡，则剩下的那1枚即是假币，若不平衡，则轻的那1枚即是假币.依据上述分析，最少称3次就一定可以发现这枚假币.

课后素养评价(三十九)

基础落实

1.B　**解析**：由“到第29天时荷花恰好开满了一半，到第30天才会开满整个池塘”可得，当$x=30$时的y值是$x=29$时的y值的两倍，所以只有指数函数$y=2^x$符合.故选B.

2.D　**解析**：设年平均增长率为x，原生产总值为$a(a>0)$，则$a(1+p)(1+q)=a(1+x)^2$，解得$x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.故选D.

3.81

能力提升

1.D　**解析**：令$\frac{1}{8}a=ae^{nt}$，即$\frac{1}{8}=e^{nt}$.由已知得$\frac{1}{2}=e^{5n}$，故$\frac{1}{8}=e^{15n}$，比较知$t=15$，$m=15-5=10$.

2.A　**解析**：由$N=90$可知，$t=-144\lg\left(1-\frac{90}{100}\right)=144$(h).

3.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**：因为$v_2-v_1=7.5$，所以$v_1-v_2=-7.5$，所以$5\log_2\frac{Q_1}{10}-5\log_2\frac{Q_2}{10}=-7.5\Rightarrow\log_2\frac{Q_1}{Q_2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{Q_1}{Q_2}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

自我超越

A　**解析**：设传令兵从排尾到排头的时间为t_1，从排头返回排尾的时间为t_2，总共用的时间为t，传令兵回到排尾时所走的路程为S，则$(v_2-v_1)t_1=L$，得$t_1=\frac{L}{v_2-v_1}$.$(v_2+v_1)t_2=L$，则$t_2=\frac{L}{v_2+v_1}$，则$v_1t=L$，所以$v_1\left(\frac{L}{v_2-v_1}+\frac{L}{v_2+v_1}\right)=L$.故$v_2=v_1(1+\sqrt{2})$或$v_2=v_1(1-\sqrt{2})<0$舍去，则$S=v_2\cdot t=v_2\cdot\frac{L}{v_1}=(1+\sqrt{2})v_1\cdot\frac{L}{v_1}=(1+\sqrt{2})L$.

课后素养评价(四十)

基础落实

1.ABC

2.A　**解析**:因为 2 286°=360°×6+126°,

所以与 2 286°角终边相同的角是 126°.

3.B　**解析**:因为 −2 025°=−6×360°+135°,易知 135°角的终边在第二象限,所以−2 025°角的终边在第二象限.

4.225°

5.−100°　−1 200°　**解析**:因为时针每小时转 30°$\left(\text{时针转一圈为 12 h,所以每小时转}\frac{360^\circ}{12}\right)$,分针每小时转 360°.又时针、分针都按顺时针方向旋转,形成的角为负角,

所以时针转过的角的度数为$\left(-3\frac{1}{3}\right)\times30^\circ=-100^\circ$,分针转过的角的度数为$\left(-3\frac{1}{3}\right)\times360^\circ=-1\,200^\circ$.

6.**解**:(1)因为角 β 的终边在直线$\sqrt{3}x-y=0$ 上,

且直线$\sqrt{3}x-y=0$ 与 x 轴正半轴的夹角为60°,

所以角 β 的集合 $S=\{\beta|\beta=60^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)在 $S=\{\beta|\beta=60^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$ 中,

取 $k=-2$,得 $\beta=-300^\circ$,取 $k=-1$,得 $\beta=-120^\circ$,

取 $k=0$,得 $\beta=60^\circ$,取 $k=1$,得 $\beta=240^\circ$,

取 $k=2$,得 $\beta=420^\circ$,取 $k=3$,得 $\beta=600^\circ$,

所以 S 中满足不等式 $-360^\circ<\beta<720^\circ$ 的元素分别是 $-300^\circ,-120^\circ,60^\circ,240^\circ,420^\circ,600^\circ$.

能力提升

1.C　**解析**:与 $-21^\circ16'$ 角终边相同的角可表示为 $\alpha=-21^\circ16'+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.由 $360^\circ\leqslant-21^\circ16'+k\cdot360^\circ\leqslant1\,440^\circ,k\in\mathbf{Z}$,得 $k=2,3,4$.故选 C.

2.AC

3.C　**解析**:若 α 是第一象限角,则 $k\cdot360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

$-90^\circ-k\cdot360^\circ<-\alpha<-k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $-\alpha$ 是第四象限角,故 D 错误;

$-k\cdot360^\circ<90^\circ-\alpha<90^\circ-k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $90^\circ-\alpha$ 是第一象限角,故 A 错误;

$90^\circ-k\cdot360^\circ<180^\circ-\alpha<180^\circ-k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $180^\circ-\alpha$ 是第二象限角,故 B 错误;

$180^\circ-k\cdot360^\circ<270^\circ-\alpha<270^\circ-k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $270^\circ-\alpha$ 是第三象限角,故 C 正确.

4.$150^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$　**解析**:因为 30°角与 150°角的终边关于 y 轴对称,所以角 β 的终边与 150°角的终边相同.

所以 $\beta=150^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

5.140°　**解析**:因为角 θ 的终边与60°角的终边相同,可得 $\theta=60^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

则$\frac{\theta}{3}=20^\circ+k\cdot120^\circ,k\in\mathbf{Z}$.令 $90^\circ<\frac{\theta}{3}<180^\circ$,

即 $90^\circ<20^\circ+k\cdot120^\circ<180^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则$\frac{7}{12}<k<\frac{4}{3}$,

又因为 $k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=1$,

所以终边与角$\frac{\theta}{3}$的终边相同的钝角为 $20^\circ+1\times120^\circ=140^\circ$.

故答案为 140°.

6.$\{\alpha|\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　**解析**:终边在 x 轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=2n\cdot90^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$,终边在 y 轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=(2n+1)\cdot90^\circ,n\in\mathbf{Z}\}$,所以终边在坐标轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

自我超越

D　**解析**:$\alpha=45^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=x$ 上的角,$\alpha=135^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=-x$ 上的角,而 $\beta=45^\circ+k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在四条射线上的角,四条射线分别是射线 $y=x,x\geqslant0$;$y=-x,x\leqslant0$;$y=x,x\leqslant0$;$y=-x,x\geqslant0$.它们构成直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$,故 $A=B$.

课后素养评价(四十一)

基础落实

1.D　**解析**:设扇形的半径为 r,

由题意可得$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times r^2=\pi$,解得 $r=2$,

所以该扇形的弧长为 $l=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$.

2.ABC

3.B　**解析**:设这条弧所在的圆的半径为 r,

$60^\circ=60\times1^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$,又 60°圆心角所对的弧长为$\frac{2\pi}{3}$,

所以$\frac{2\pi}{3}=r\times\frac{\pi}{3}$,解得 $r=2$.

4.**解**:(1)设扇形的圆心角为 α,半径为 R cm,弧长为 l cm,扇形的周长为 y cm,则 $y=l+2R$.

由题意,得$\frac{1}{2}lR=25$,则 $l=\frac{50}{R}$,故 $y=\frac{50}{R}+2R(R>0)$.

利用函数单调性的定义,可以证明,当 $0<R\leqslant5$ 时,函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递减;当 $R>5$ 时,函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递增.所以当 $R=5$ 时,y 取最小值 20,此时 $l=10$,$\alpha=\frac{l}{R}=2$,即当扇形的圆心角为 2 时,扇形的周长取最小值.

(2)设扇形的圆心角为 θ,半径为 r,弧长为 l,面积为 S,

则 $l+2r=40$,所以 $l=40-2r$,

所以 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=-(r-10)^2+100$.

所以,当半径 $r=10$ cm 时,扇形的面积最大,最大面积为 100 cm^2,此时 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2$(rad).

能力提升

1.D **解析**：设扇形的圆心角为 θ，半径为 r，

则由题意可得 $\frac{1}{2}\theta r^2=4$，

所以 $2r+\theta r=2r+\frac{8}{r}\geqslant 2\sqrt{2r\cdot\frac{8}{r}}=8$，

当且仅当 $2r=\frac{8}{r}$ 时，即 $r=2,\theta=2$ 时，等号成立.

所以当扇形的圆心角为 2 时，扇形的周长取得最小值 8.

故选 D.

2.D **解析**：因为一条弧所对的圆心角是 2 rad，它所对的弦长为 2，所以所在圆的半径为 $r=\frac{1}{\sin 1}$，则这条弧的长 $l=2\times\frac{1}{\sin 1}=\frac{2}{\sin 1}$.

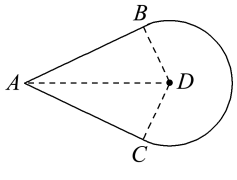
3.$\frac{2\pi}{3}$ **解析**：由题意，圆心角为 α rad，半径为 r 的扇形，此扇形的周长为 l_1，剩余部分扇形的周长为 l_2，

可得 $l_1=2r+\alpha r$，$l_2=2r+(2\pi-\alpha)r$，

故 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{2+\alpha}{2+2\pi-\alpha}=\frac{3+\pi}{3+2\pi}$，解得 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

自我超越

$4\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}$ **解析**：如图，取优弧 BC 所在圆的圆心 D，连接 AD,BD,CD，



则 $BD\perp AB$，$CD\perp AC$，由题意可知 $AD=4$，$BD=CD=2$，

所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle BDC=\frac{2\pi}{3}$.

故优弧 BC 对应的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$，对应的扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times 2^2=\frac{8\pi}{3}$.

而 $AB=AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

则 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$，

所以该“水滴”的面积为 $\frac{8}{3}\pi+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=4\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}$.

课后素养评价（四十二）

基础落实

1.C **解析**：由已知可得 $P(1,-\sqrt{3})$，因为角 α 的终边过点 P，

所以 $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

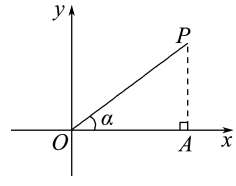
2.C **3.D** **4.± 1**

5.(8,6) **解析**：如图，过点 P 作 $PA\perp x$ 轴，垂足为 A. 在 Rt$\triangle OAP$ 中，$OP=10$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $AP=OP\cdot\sin\alpha=6$，

所以 $OA=\sqrt{OP^2-AP^2}=8$，

所以点 P 的坐标为(8,6).



能力提升

1.B **解析**：若角 α 的终边在第一象限，设终边上一点 $P(x,y)$，则点 P 关于 $y=-x$ 的对称点 $P'(-y,-x)$ 在 β 终边上，

此时 $\cos\beta=\frac{-y}{\sqrt{(-y)^2+(-x)^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$；

若角 α 的终边在第二象限，设终边上一点 $Q(x,y)$，则点 Q 关于 $y=-x$ 的对称点 $Q'(-y,-x)$ 在 β 终边上，

此时 $\cos\beta=\frac{-y}{\sqrt{(-y)^2+(-x)^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$. 综上所述，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$.

2.BD **解析**：若 α 的终边上有一点 $P(a,-3a)(a\neq 0)$，

当 $a>0$ 时，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}|a|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\sin\alpha=\frac{-3a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{\sqrt{10}|a|}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

此时 $\sin\alpha-2\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}-2\times\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$；

当 $a<0$ 时，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}|a|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{-3a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{\sqrt{10}|a|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

此时 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}-2\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

自我超越

ACD **解析**：$\cot\frac{5\pi}{4}=\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{4}}=1$，故 A 正确；$\sin\alpha\cdot\sec\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=1$ 不一定成立，故 B 不正确；$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，则 $\cos x\neq 0$，即 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；因为角 α 的终边经过点 $P(2,4)$，所以 $r=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha+\sec\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故 D 正确.

课后素养评价(四十三)

基础落实

1.A　**解析**：$\tan 300^\circ+\cos 510^\circ=\tan(360^\circ-60^\circ)+\cos(360^\circ+150^\circ)=-\tan 60^\circ+\cos 150^\circ=-\tan 60^\circ-\cos 30^\circ=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2.C　**解析**：因为$\frac{\pi}{2}\approx1.57$，$\pi\approx3.14$，且$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，所以2弧度的角是第二象限角.

根据余弦函数的性质，在第二象限中，余弦值是负数，所以$\cos 2<0$.

根据正切函数的性质，在第二象限中，正切值是负数，所以$\tan 2<0$.

在平面直角坐标系中，横坐标小于0且纵坐标小于0的点在第三象限，

因为点$A(\cos 2,\tan 2)$中，$\cos 2<0$，$\tan 2<0$，所以点A在第三象限，

即点$A(\cos 2,\tan 2)$在平面直角坐标系中位于第三象限.

3.CD

4.(1)$\frac{4}{3}$　(2)$\frac{16}{25}$　**解析**：由题意知$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)=\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

(2)原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$.

5.解：(1)原式$=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$.

(2)原式$=\sin(90^\circ+2\times360^\circ)+\tan(45^\circ+2\times360^\circ)-\cos 360^\circ=\sin 90^\circ+\tan 45^\circ-1=1+1-1=1$.

能力提升

1.D　**解析**：因为$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$，所以$\sin\theta$，$\tan\theta$同号.

当θ的终边在第一象限时，$\sin\theta>0$，$\tan\theta>0$；

当θ的终边在第四象限时，$\sin\theta<0$，$\tan\theta<0$.

所以θ是第一或第四象限角.

2.AD　**解析**：由α是第一象限角，得$2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$4k\pi<2\alpha<\pi+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$2\alpha$的终边在$x$轴上方，则$\sin 2\alpha>0$，$\cos 2\alpha$的正负不确定；又因为$k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角，则$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}$的正负不确定.

3.A

自我超越

解：(1)因为$\sin\theta<0$，所以θ为第三或第四象限角，或角θ的终边与y轴的负半轴重合.

因为$\tan\theta>0$，所以θ为第一或第三象限角.

所以θ为第三象限角，

故角θ的集合为$\left\{\theta\,\middle|\,2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由(1)可知，$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当k是偶数时，$\frac{\theta}{2}$的终边在第二象限；

当k是奇数时，$\frac{\theta}{2}$的终边在第四象限.

(3)由(2)可知，

当k是偶数时，$\sin\frac{\theta}{2}>0$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$，$\tan\frac{\theta}{2}<0$，

所以$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$；

当k是奇数时，$\sin\frac{\theta}{2}<0$，$\cos\frac{\theta}{2}>0$，$\tan\frac{\theta}{2}<0$，

所以$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$.

综上可知，$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$，符号为正.

课后素养评价(四十四)

基础落实

1.D　**解析**：因为$\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以$\cos\beta>0$.

又因为$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，所以$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2.A

3.D　**解析**：因为$\sin\theta=-2\cos\theta$，所以$\tan\theta=-2$，

所以$\frac{3+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{3\sin^2\theta+4\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{3\tan^2\theta+4}{\tan\theta}=-8$.

4.B　**5.**A　**6.**1

能力提升

1.C　**解析**：关于x的一元二次方程$x^2-\frac{1}{5}x+m=0$的两根分别为$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，

由$\Delta=\frac{1}{25}-4m>0$，可得$m<\frac{1}{100}$.

又由一元二次方程根与系数的关系可得$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m$，

所以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{25}$，

解得$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，即$m=-\frac{12}{25}$.

2.A　**解析**：因为$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，

所以$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{4}{9}=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$，解得$\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$.又$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，$\cos\theta>0$，则$\sin\theta<0$，故$\theta$是第四象限角，所以$\sin\theta-\cos\theta<0$.又$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$，所以$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{14}}{3}$.

3.$-\frac{12}{5}$　**解析：**(方法一：构建方程组)

因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$①，

所以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}$，

即$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}$.

因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.

所以$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{17}{13}$②.

由①②解得$\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$.

(方法二：弦化切)同方法一，求出$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{60}{169}$，

所以$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{60}{169}$，所以$\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{60}{169}$，

整理得$60\tan^2\alpha+169\tan\alpha+60=0$，

解得$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$或$\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

由$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}>0$知$|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$.

故$\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

4.$\pm\sqrt{5}$

自我超越

解：(1)$f(\alpha)=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}+\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2}{|\cos\alpha|}$.

(2)因为α为第三象限角，所以$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$.

又因为$f(\alpha)=\frac{2}{|\cos\alpha|}=3$，所以$\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.

故$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

课后素养评价(四十五)

基础落实

1.D　**解析：**由诱导公式可得，$\cos\frac{22\pi}{3}=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

2.B　**解析：**因为$\sin(5\pi-\alpha)=\sin(4\pi+\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3.$\sin 2-\cos 2$　**4.**$-\frac{1}{3}$

5. **解：**(1)$f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(-\alpha-\pi)\sin(-\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)因为α是第三象限角，且$\sin(\alpha-5\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，所以$\sin\alpha=-\frac{1}{5}$，故$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，因此$f(\alpha)=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(3)当$\alpha=-2\,220°$时，

$f(\alpha)=-\cos(-2\,220°)=-\cos 2\,220°=-\cos(6\times360°+60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$.

能力提升

1.AD　**2.**B

3.0　**解析：**因为$f(2\,024)=a\sin(2\,024\pi+\alpha)+b\cos(2\,024\pi+\beta)+5=a\sin\alpha+b\cos\beta+5=10$，

所以$a\sin\alpha+b\cos\beta=5$，

所以$f(2\,025)=a\sin(2\,025\pi+\alpha)+b\cos(2\,025\pi+\beta)+5=-a\sin\alpha-b\cos\beta+5=-5+5=0$.

4.-2　**解析：**$f\left(-\frac{11}{6}\right)=\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

$f\left(\frac{11}{6}\right)=f\left(\frac{11}{6}-1\right)-1=f\left(\frac{5}{6}\right)-1=f\left(\frac{5}{6}-1\right)-2=f\left(-\frac{1}{6}\right)-2=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2=-\sin\frac{\pi}{6}-2=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$，

所以$f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$.

自我超越

解：(1)$\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当$n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当$n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\pi+\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角α有$\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(2)$\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当$n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha=(-1)^{2k-1}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时，由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi+\pi-\alpha)=\sin\alpha=(-1)^{2k}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 α 有 $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(3)$\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时，由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时，由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi+\pi-\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 α 有 $\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

课后素养评价(四十六)

基础落实

1.B　**解析**：因为 $\cos\left(\frac{2\,025\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(1\,012\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.故选 B.

2.A

3.D　**解析**：$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$.故选 D.

4.$\frac{1}{\tan\alpha}$　**解析**：原式$=-\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$.

5.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

能力提升

1.A　**解析**：因为 $\sin(3\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-2\cos\alpha$，

所以 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$.又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

当 α 为第二象限角时，$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 此时 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；

当 α 为第四象限角时，$\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 此时 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$.

综上，$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$.

故选 A.

2.D　**解析**：在非等腰三角形 ABC 中，$A\neq B$，$\begin{cases}0<A<\pi,\\ 0<B<\pi,\\ 0<A+B<\pi.\end{cases}$ 由 $\sin4A=\sin4B$，

得 $4A+4B=\pi$ 或 $4A+4B=3\pi$ 或 $4A=4B+2\pi\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $4B=4A+2\pi\left(0<A<\frac{\pi}{4}\right)$，

即 $A+B=\frac{\pi}{4}$ 或 $A+B=\frac{3\pi}{4}$ 或 $A=B+\frac{\pi}{2}\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $B=A+\frac{\pi}{2}\left(0<A<\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $A+B=\frac{3\pi}{4}$ 时，$C=\frac{\pi}{4}$，则 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 AC 可能正确；

当 $A=B+\frac{\pi}{2}\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\sin A=\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B$，B 可能正确；

对于 D，要 $\sin2A=\sin2B$，而 $A\neq B$，则必有 $2A+2B=\pi$，即 $A+B=\frac{\pi}{2}$，不成立，D 错误.故选 D

3.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　**解析**：由条件可知 $-2\tan\alpha+3\sin\beta=-5$①，$\tan\alpha-6\sin\beta=1$②，

①×2+②，可得 $\tan\alpha=3$，则 $\sin\alpha=3\cos\alpha$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$ 为锐角，故可解得 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

4.解：(1)$\frac{\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}$

$=\frac{(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)}{\cos\alpha(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)}$

$=\frac{1}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{3}$，

因为 α 是第三象限角，所以 $\tan\alpha>0$，所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

(2)$\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3+3\times\sqrt{3}}{3+1}=\frac{3+3\sqrt{3}}{4}$.

(3)因为 α 是第三象限角，且 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，角 β 与角 α 的终边关于 x 轴对称，则 $\tan\beta=-\sqrt{3}$，

所以 $\frac{\sin(\pi-\beta)-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\cos(5\pi+\beta)}=\frac{\sin\beta+2\cos\beta}{-2\sin\beta-\cos\beta}$

$=\frac{\tan\beta+2}{-2\tan\beta-1}=\frac{-\sqrt{3}+2}{-2\times(-\sqrt{3})-1}=\frac{3\sqrt{3}-4}{11}$.

自我超越

CD　**解析**：对于选项 A，若角 α 和 β 广义互余，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，即 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

$\cos(\pi+\beta)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，故 A 错误；

对于选项 B，$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

解得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{16}$，

则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$，故 B 错误；

对于选项 C，$\cos(2\pi-\beta)=\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{1}{4}$，故 C 正确；

对于选项 D，$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

即满足 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 的角 β 可能与角 α 广义互余，故 D 正确.

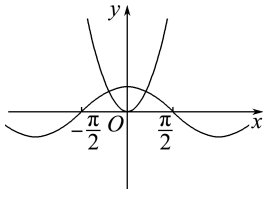
故选 CD.

课后素养评价（四十七）

基础落实

1.B　**2.**AC

3.2　**解析**：作函数 $y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 的图象，如图所示，由图象，可知原方程有 2 个实数解.



4.$\left(\frac{\pi}{2},4\right),\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$　**解析**：由 $\begin{cases}y=\cos x+4,\\y=4,\end{cases}$ 解得 $\cos x=0$，

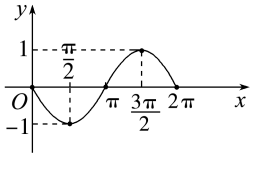
当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$ 或 $x=\frac{3\pi}{2}$，

所以交点坐标为 $\left(\frac{\pi}{2},4\right),\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$.

5.解：(1)找五个关键点，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

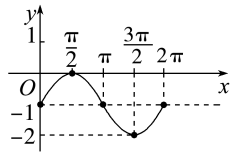
描点，连线，如图所示.函数 $y=-\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象与函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象关于 x 轴对称.



(2)找五个关键点，列表：

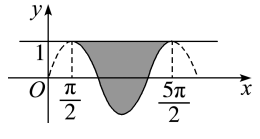
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

描点，连线，如图所示.函数 $y=\sin x-1$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象是将函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象向下平移 1 个单位长度得到的.

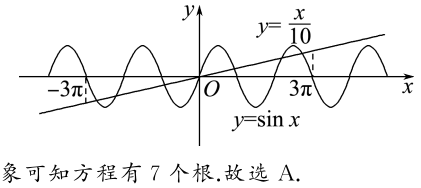


能力提升

1.C　**解析**：如图，由正弦函数图象的对称性知，所围成平面图形的面积是长为 $\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi$、宽为 1 的矩形的面积，所以这个平面图形的面积为 $S=2\pi$.故选 C.

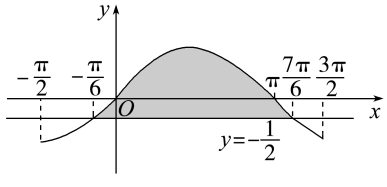


2.A　**解析**：在同一坐标系内画出 $y=\frac{x}{10}$ 和 $y=\sin x$ 的图象如图所示.



根据图象可知方程有 7 个根.故选 A.

3.$\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$　**解析**：要使函数有意义，则必有 $2\sin x+1>0$，即 $\sin x>-\frac{1}{2}$.画出 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的图象，如图所示.



当 $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$ 时，不等式 $\sin x>-\frac{1}{2}$ 成立，

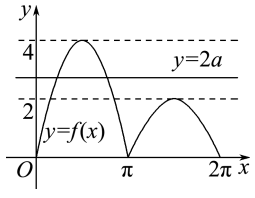
所以 $\sin x>-\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

可知函数 $y=\log_2(2\sin x+1)$ 的定义域

为$\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

4.(1,2)　**解析**：依题意，$f(x)=\sin x+3|\sin x|=\begin{cases}4\sin x,x\in[0,\pi),\\-2\sin x,x\in[\pi,2\pi],\end{cases}$

画出函数$y=f(x)$的图象，如图所示.



由图象知，当$2a\in(2,4)$，即$a\in(1,2)$时，函数$f(x)$的图象与直线$y=2a$有两个交点，

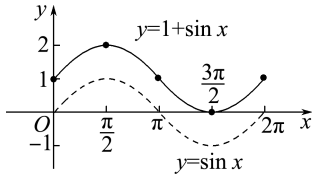
所以实数a的取值范围是(1,2).

自我超越

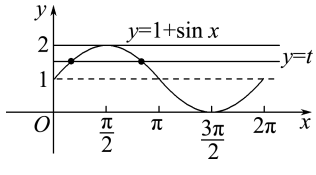
解：(1)由题意，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$\sin x+1$	1	2	1	0	1

根据五点，作图：



(2)如图：



观察图象得：当$t<0$或$t>2$时，有0个交点；

当$t=0$或$t=2$时，有1个交点；

当$0<t<1$或$1<t<2$时，有2个交点；

当$t=1$时，有3个交点.

课后素养评价(四十八)

基础落实

1.B

2.BC　**解析**：对于A，因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|2\sin\frac{\pi}{6}+1\right|=2$，所以$f\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\left|2\sin\frac{7\pi}{6}+1\right|=0$，而$f\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，故A错误；

对于B，因为$f(x)=|\cos 2x-1|=1-\cos 2x$，所以函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故B正确；对于C，因为$f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|=|-\cos x|=|\cos x|=f(x)$，故C正确；

对于D，因为$y=\cos x$为偶函数，所以$f(x)=\cos|x|=\cos x$，其最小正周期为2π，故D错误.

故选BC.

3.B

4.A　**解析**：当$x\in[-1,0]$时，$-x+2\in[2,3]$，所以当$x\in[-1,0]$时，$f(x)=f(-x)=f(-x+2)=5-2(-x+2)=1+2x$，所以$f\left(-\frac{3}{4}\right)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.故选A.

5.解：因为$T=\pi$，且$f(x)$为偶函数，所以$f\left(\frac{10\pi}{3}\right)=f\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$f\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=f\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

能力提升

1.D　**解析**：对于A，由$\cos x\neq0$可得，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数$f(x)=\frac{3}{\cos x}$的定义域为$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，

又$f(-x)=\frac{3}{\cos(-x)}=\frac{3}{\cos x}=f(x)$，所以函数$f(x)=\frac{3}{\cos x}$为偶函数.故A错误.

对于B，易知函数$f(x)=\sin 4x$的定义域为$\mathbf{R}$，

又$f(-x)=\sin(-4x)=-\sin 4x=-f(x)$，所以函数$f(x)=\sin 4x$为奇函数.

又$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以$4x\in[0,2\pi]$.

正弦函数$y=\sin x$在$[0,2\pi]$上既有增区间又有减区间，不满足题目要求，故B错误.

对于C，易知函数$f(x)=\sin|x|$的定义域为$\mathbf{R}$，

又$f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x)$，

所以函数$f(x)=\sin|x|$为偶函数.故C错误.

对于D，易知函数$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$的定义域为$\mathbf{R}$，

又$f(-x)=\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\sin\frac{1}{2}x=-f(x)$，所以函数$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$为奇函数.

又$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以$\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$.

正弦函数$y=\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$上单调递增，故D正确.故选D.

2.C　**解析**：因为$f(m)=2$，所以$f(m)=2^m-2^{-m}+a\sin m+1$.

设 $f(-m)=2^{-m}-2^{m}-\alpha\sin m+1=t$，

可得 $f(m)+f(-m)=2^{m}-2^{-m}+\alpha\sin m+1+2^{-m}-2^{m}-\alpha\sin m+1=2=t+2$，解得 $t=0$.

3.2　**解析**：因为 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(x-1)^2+ax+\cos x$ 为偶函数，定义域为 **R**，所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\frac{\pi}{2}a+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}a+\cos\frac{\pi}{2}$，

则 $\pi a=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=2\pi$，故 $a=2$，

此时 $f(x)=(x-1)^2+2x+\cos x=x^2+1+\cos x$，

所以 $f(-x)=(-x)^2+1+\cos(-x)=x^2+1+\cos x=f(x)$.

又定义域为 **R**，故 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a=2$.

4.$\pm\frac{4}{5}$　**解析**：因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha=\frac{9}{5}$，

得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

自我超越

(1)**证明**：因为 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是周期函数，4 就是它的一个周期.

(2)**解**：因为 4 是 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(5)=f(1)=-5$，则 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\frac{-1}{f(-1+2)}=\frac{-1}{f(1)}=\frac{1}{5}$.

课后素养评价(四十九)

基础落实

1.A　**解析**：由题意得 $4x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，

故函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}=\frac{(6k+1)\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.

结合选项得直线 $x=\frac{\pi}{24}$ 为函数图象的一条对称轴.故选 A.

2.C

3.B　**解析**：$a=\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{15\pi}{4}+4\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}$，$b=\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$，$c=\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，

而 $\sin\frac{2\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{4}>\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，故 $b>a>c$.故选 B.

4.D　**解析**：因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}$.

由函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，可知 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant2$.

综上可知，ω 的取值范围是 $(0,2]$.故选 D.

5.$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　1

能力提升

1. AB　**解析**：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.$y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{6},-\pi\right]$，$\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减，

又 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{7\pi}{6},-\pi\right]\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间是 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$，$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

2.A　**解析**：$f(x)=\sin3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(3\omega x+\pi)=-\sin3\omega x$，由 $T=\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$，得 $\omega=\frac{2}{3}$，

即 $f(x)=-\sin2x$.当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\sin2x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

3.解：(1)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant1$.令 $t=\sin x$，$t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $y=\sin^2x+2\sin x+2=t^2+2t+2=(t+1)^2+1$.

又二次函数 $y=(t+1)^2+1$ 的图象开口向上，对称轴为 $t=-1$，

所以当 $t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 时，函数 $y=(t+1)^2+1$ 单调递增.

则当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$y=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+1=\frac{5}{4}$，

当 $t=1$ 时，$y=(1+1)^2+1=5$.

综上，函数 y 的值域为 $\left[\frac{5}{4},5\right]$.

(2)因为 $y=\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}$，所以 $\cos x=\frac{1-y}{2+2y}$，且 $y\neq-1$.

又因为 $|\cos x|\leqslant1$，所以 $\left|\frac{1-y}{2+2y}\right|\leqslant1$，即 $(1-y)^2\leqslant(2+2y)^2$，

整理得 $(y+3)(3y+1)\geqslant0$，解得 $y\leqslant-3$ 或 $y\geqslant-\frac{1}{3}$.

综上，函数 y 的值域为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

自我超越

解：(1)由题意得 $f(x)=-2\sin^2x-a\sin x+1$，

令 $t=\sin x$，$t\in[-1,1]$，则 $g(t)=-2t^2-at+1$.

当 $a=1$ 时，$g(t)=-2t^2-t+1=-2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，

所以当 $t=-\frac{1}{4}$ 时，$g(t)$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$；

当 $t=1$ 时，$g(t)$ 取最小值 -2，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-2,\frac{9}{8}\right]$.

(2)由题意得，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有两个不同的零点，即函数 $g(t)=-2t^2-at+1$ 在 $(0,1)$ 上仅有一个零点，因为 $g(0)=1>0$，所以由零点存在定理，只需 $g(1)=-a-1<0$，解得 $a>-1$. 所以实数 a 的取值范围为 $(-1,+\infty)$.

课后素养评价(五十)

基础落实

1.B　**解析**：由题意得，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$，

所以 $k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数的定义域为 $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

故选 B.

2.B　**解析**：令 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $a>0$，所以当 $k=0$ 时，a 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

3.BD　**4**.1

能力提升

1.B　**解析**：令 $t=\tan x$，则 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x}=\left(\frac{1}{3}\right)^t$.

因为 $t=\tan x$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

所以 $t=\tan x\in(-1,1)$.

又 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $t\in(-1,1)$，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^t\in\left(\frac{1}{3},3\right)$，即 $f(x)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{3},3\right)$.

2.C　**解析**：由题意知 $f(n)=\tan\frac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$，且 $f(1)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f(2)=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，$f(3)=\tan\pi=0$，

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 025)=f(1)+f(2)+\cdots+f(675\times3)=675\times[f(1)+f(2)+f(3)]=0$. 故选 C.

3.BC　**解析**：对于 A，令 $2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，

由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，有 $\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，

由单调性的定义可知，$f(x)$ 在定义域内不具有单调性，故 A 错误；

对于 B，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，故 B 正确；

对于 C，由 $2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，得 $x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数图象与直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 不相交，故 C 正确；

对于 D，$f(-x)=\tan\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，可知 $f(x)$ 是非奇非偶函数，故 D 错误.

4.-1　**解析**：令 $2x+\varphi=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

令 $k=0$，可得 $x=-\frac{\varphi}{2}$，得 $-\frac{\varphi}{2}=-\frac{\pi}{8}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(\frac{2\ 025\pi}{4}\right)=\tan\left(2\times\frac{2\ 025\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(1\ 012\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}=-1$.

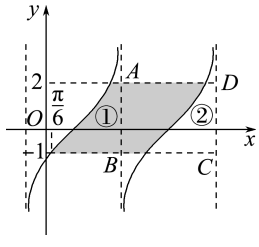
自我超越

D　**解析**：如图，①和②的面积相等，故阴影部分的面积即为矩形 $ABCD$ 的面积，可得 $AB=3$.设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $AD=T$.

由题意得 $3T=6\pi$，解得 $T=2\pi$，故 $\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，得 $\omega=\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$.

因为 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$，所以 $\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=-1$，

又 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\pi}{12}+\varphi\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，



所以 $\frac{\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

故 $f\left(\frac{2\,026\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{2\,026\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{2\,024\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

课后素养评价（五十一）

基础落实

1.A　**解析**：$\cos 26^\circ\cos 34^\circ-\sin 26^\circ\sin 34^\circ=\cos(26^\circ+34^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

2.A

3.$-\frac{16}{65}$　**解析**：因为 $\cos B=-\frac{12}{13}$，且 $0<B<\pi$，

所以 $\frac{\pi}{2}<B<\pi$，且 $0<A<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$，

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$，

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$.

4.$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

能力提升

1.D　**解析**：由题意，得 $\sin\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}}=\frac{3}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}}=\frac{4}{5}$.

由 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，可知 $\sin(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\pm\sqrt{\frac{25}{169}}=\pm\frac{5}{13}$.

若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，

则 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$；若 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，则 $\cos\beta=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$.故 $\cos\beta$ 的值为 $\frac{63}{65}$ 或 $\frac{33}{65}$.

2.$\frac{1}{2}$　**解析**：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，

又 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，两式相除可得 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$.

3.解：由题意知 $\tan\alpha=2$.

（1）原式 $=\frac{(-\cos\alpha)\cdot(-\cos\alpha)\cdot\tan^2\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}$

$=\tan\alpha=2$.

（2）因为 α 是第一象限角，且终边过点 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，

所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

自我超越

解：因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\alpha<0$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

又因为 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)$

$=-\cos\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\cdot$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{56}{65}$.

课后素养评价(五十二)

基础落实

1.B

2.B　**解析**:因为 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,所以 $\frac{4-\tan\beta}{1+4\tan\beta}=\frac{1}{13}$,解得 $\tan\beta=3$.

3.B　**解析**:因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$,

所以 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.A　**5.**2　**6.**$\frac{\sqrt{2}}{2}$

能力提升

1.D　**解析**:由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

又因为 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$,所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$,则 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.又因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,可得 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.由 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$,可知 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,即 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}}=-7$.故选 D.

2.C　**解析**:因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\alpha-\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha-\beta=\frac{5\pi}{4}$.

3.C　**解析**:因为 $\tan(\alpha+\beta)=3$,$\tan(\alpha-\beta)=5$,

所以 $\begin{cases}\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=3,\\ \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=5,\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=3(1-\tan\alpha\tan\beta)①,\\ \tan\alpha-\tan\beta=5(1+\tan\alpha\tan\beta)②.\end{cases}$

①+②得 $\tan\alpha=4+\tan\alpha\tan\beta$,①−②得 $\tan\beta=-1-4\tan\alpha\tan\beta$.

所以 $4\tan\alpha+\tan\beta=16-1=15$.

自我超越

BD　**解析**:对于 A,因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{4}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$,所以 $\frac{3}{5}=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta=3\sin\alpha\sin\beta$,解得 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,$\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{5}$,故 A 错误;

对于 B,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$,故 B 正确;

对于 C,因为 α,β 为锐角,所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}>0$,所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1$,故 C 错误;

对于 D,因为 α,β 为锐角,所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

又因为 $\cos(\alpha-\beta)=1$,所以只能 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=0$①,

又 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}$②,①+②解得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$,故 D 正确.

课后素养评价(五十三)

基础落实

1.D　**解析**:由二倍角公式得 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$.

2.A　**解析**:因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{4}$,所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\frac{1}{8}$,

所以 $\sin 2\alpha=\frac{7}{8}$.

3.$\sqrt{3}$　**4.**$\frac{7}{25}$

5.$\frac{\sqrt{2}}{10}$　**解析**：由题意 $\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{4}{5}$，

$\cos 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

能力提升

1.D　**解析**：$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$，因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

2.C　**解析**：$\frac{1-2\sin^2 27^\circ}{a\sqrt{4-a^2}}=\frac{\cos 54^\circ}{2\cos 72^\circ\sqrt{4-4\cos^2 72^\circ}}$

$=\frac{\cos 54^\circ}{2\cos 72^\circ\sqrt{4\sin^2 72^\circ}}=\frac{\cos 54^\circ}{4\cos 72^\circ\sin 72^\circ}=\frac{\cos 54^\circ}{2\sin 144^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{1}{2}$.

3.D　**解析**：由 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$ 知，

$\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{7}{25}$，

所以 $\sin\left(2\varphi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{7}{25}$.

4.解：因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\pi<\alpha-\beta<0$.

又因为 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}>-1$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<0$.

由二倍角正切公式可得 $\tan[2(\alpha-\beta)]=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$，

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan 2(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan 2(\alpha-\beta)\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{7}}=-1$.

因为 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<0$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<2(\alpha-\beta)+\beta<\frac{\pi}{2}$，即 $-\frac{\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

因此 $2\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

自我超越

(1)**证明**：因为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$，

则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，

化简可得 $A=B$，或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，

但 $A\neq B$，所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

(2)**解**：由(1)可知 $A+B=\frac{\pi}{2}$，故 $\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，

故 $\sin A+\sin B$ 的取值范围是 $(1,\sqrt{2}]$.

(3)**解**：由题意可知 $x=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$，

设 $\sin A+\cos A=t\in(1,\sqrt{2}]$，

则 $t^2=1+2\sin A\cos A$，故 $\sin A\cos A=\frac{t^2-1}{2}$，代入得 $x=\frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}=\frac{2t}{t^2-1}=\frac{2}{t-\frac{1}{t}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$，

故实数 x 的取值范围为 $[2\sqrt{2},+\infty)$.

课后素养评价(五十四)

基础落实

1.D　**2.**B

3.A　**解析**：因为 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\sin C$，

所以已知等式变形得：$\sin C\sin(A-B)=\sin^2 C$.

因为 $0<C<\pi$，$\sin C>0$，

所以 $\sin(A-B)=\sin C=\sin(A+B)$，

整理得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $2\cos A\sin B=0$，

所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B=0$(不合题意，舍去).

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，

则此三角形为直角三角形.

4.$\pm\frac{3}{5}$

5.证明：(方法一)左边 $=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2}{\sin\theta}=$右边，

所以原等式成立.

(方法二)左边$=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2(1+\sin\theta)^2+2\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}=\dfrac{4+4\sin\theta}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}=$右边，

所以原等式成立.

能力提升

1.B　**解析**：由 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\alpha-3}{\sin\alpha}$，

得 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3\cos\alpha+\sin\alpha-3}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-6\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$=1-3\tan\dfrac{\alpha}{2}$，

则 $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{5}{13}$.

2.AC　**解析**：由 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}+1$，得 $2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta=\sqrt{3}+2\cos\theta$，即 $\sin 2\theta+\sqrt{3}(2\cos^2\theta-1)=2\cos\theta$，故 $\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta=2\cos\theta$. 由辅助角公式得 $2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\theta$，即 $\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\theta$. 因为 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

故 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\theta$ 或 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}+\theta=0$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{18}$.

3.$-\dfrac{31}{25}$　**解析**：$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$，

则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{-\frac{8}{3}+1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-\dfrac{31}{25}$.

4.$\dfrac{7\pi}{4}$　**解析**：$\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1-\cos A}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\cos A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$，

即 $\dfrac{1-\sqrt{3}\sin A}{2}=\dfrac{5-\sqrt{15}}{10}$，得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且 A，B 均为钝角，

所以 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2A}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2B}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<B<\pi$，所以 $\pi<A+B<2\pi$，所以 $A+B=\dfrac{7\pi}{4}$.

自我超越

C　**解析**：由 $\cos\dfrac{7\pi}{15}=\cos\left(\pi-\dfrac{8\pi}{15}\right)=-\cos\dfrac{8\pi}{15}$，$\sin\dfrac{7\pi}{30}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{8\pi}{30}\right)=\cos\dfrac{4\pi}{15}$，得

原式$=-\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$，

由 $\sin\dfrac{16\pi}{15}=16\sin\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$，

故原式$=-\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}=-\dfrac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}=\dfrac{1}{16}$.

故选 C.

课后素养评价(五十五)

基础落实

1.D　**解析**：由 $\tan 20^\circ+4\sin\theta=\sqrt{3}$，得

$\dfrac{\sin 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}\Rightarrow\sin 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ=\sqrt{3}\cos 20^\circ$

$\Rightarrow\sin 20^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ=0\Rightarrow 2\sin(20^\circ-60^\circ)+4\sin\theta\cos 20^\circ=0$，

故 $2\sin 40^\circ=4\sin\theta\cos 20^\circ\Rightarrow\sin\theta=\sin 20^\circ$，

因此 $\theta=k\cdot 360^\circ+20^\circ$ 或 $\theta=k\cdot 360^\circ+160^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.

则满足条件的 θ 的一个值为 160°. 故选 D.

2.B　**解析**：$f(x)=\sin 3x+a\cos 3x=\sqrt{1+a^2}\sin(3x+\theta)$，其中 $\tan\theta=a$，又 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

所以 $\left|\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{12}\right)+a\cos\left(3\times\dfrac{\pi}{12}\right)\right|=\sqrt{1+a^2}$，解得 $a=1$，即 $\tan\theta=1$，可取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$. 故选 B.

3.C

4. $2\sqrt{2}$　**解析：**$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)}{\cos 70^\circ\sqrt{1+\cos 40^\circ}}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)}{\sin 20^\circ\sqrt{2\cos^2 20^\circ}}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin(30^\circ+10^\circ)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 40^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 40^\circ}=2\sqrt{2}$.

5. $-\dfrac{\pi}{6}$

6.解：$f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1)$f(x)$的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

得 $k\pi-\dfrac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $x=\dfrac{\pi}{8}$时,$f(x)$取到最大值$\sqrt{2}$;

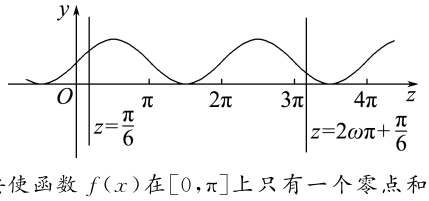
当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$,即 $x=\dfrac{\pi}{2}$时,$f(x)$取到最小值-1.

能力提升

1.C　**解析：**由 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1+\cos 2\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$,

设 $z=2\omega x+\dfrac{\pi}{6}$,由 $x\in[0,\pi]$可得 $z\in\left[\dfrac{\pi}{6},2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$.

如图,作出函数 $y=\sin z+1$ 在 $z\in\left[\dfrac{\pi}{6},2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$上的图象.



由图,要使函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上只有一个零点和两个最大值点,需使 $\dfrac{5\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{2}$,解得 $\dfrac{7}{6}\leqslant\omega<\dfrac{5}{3}$.

2.BC　**解析：**$f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

对于 A,由 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\neq\pm\sqrt{2}$,得 $f(x)$的图象不关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$对称,A 错误;

对于 B,由 $f\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\left(-2\times\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,得函数 $f(x)$的图象关于点$\left(-\dfrac{3\pi}{8},0\right)$对称,B 正确;

对于 C,当 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)$单调递减,令 $k=0$,则函数 $f(x)$在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$上单调递减,C 正确;

对于 D,取 $x=0$,则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=-1$,$\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}}\neq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,D 错误.

3.$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　**解析：**由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$.

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,$\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$,$m\in\mathbf{Z}$,

则 $\alpha+\beta\in((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi)$,$k$,$m\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$,

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\dfrac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$,$k$,$m\in\mathbf{Z}$,则 $\sin(\alpha+\beta)<0$,

则 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$,联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$,解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4.$2\sqrt{13}$　**解析：**因为 $f(x)=2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$(其中 $\tan\varphi=\dfrac{3}{2}$),

所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{13}$,$f(x)_{\min}=-\sqrt{13}$.

因为 x_1,$x_2\in\mathbf{R}$,所以 $f(x_1)-f(x_2)$的最大值为 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\sqrt{13}-(-\sqrt{13})=2\sqrt{13}$.

自我超越

$\dfrac{\pi}{6}$

课后素养评价(五十六)

基础落实

1.B　**解析**:由题意可得 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度可得 $y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,故 B 正确.

2.BD　**解析**:将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上所有的点,横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),可得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象,再向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度,可得函数 $y=\sin x$ 的图象,故 D 正确;又 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$,所以将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$ 的图象,先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度,得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象,再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),可得函数 $y=\sin x$ 的图象,故 B 正确.

3.C　**解析**:由题意得 $g(x)=\sin\left[4(x+a)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(4x+4a+\frac{\pi}{3}\right)$,与函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴相同,则 $4a=k\pi,k\in\mathbf{N}^*$,得 $a=\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{N}^*$,所以 a 的值可能为 $\frac{\pi}{4}$.

4.$\frac{\pi}{4}$　**解析**:由题可知 $y=3\sin[2(x+\varphi)]=3\sin(2x+2\varphi)$ 为偶函数,所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.$\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{23\pi}{12}\right)-1$　**解析**:函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

得到 $f(x)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]+B=A\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)+B$ 的图象,

图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $f(x)=A\sin\left(2\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)+B$ 的图象,

向上平移 1 个单位长度,得到 $f(x)=A\sin\left(2\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)+B+1=\sin x$ 的图象,

则 $\begin{cases}2\omega=1,\\ \frac{\omega\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z}),\\ B+1=0,\\ A=1.\end{cases}$ 又 $\varphi\in(0,2\pi)$,解得 $\begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ \omega=\frac{1}{2},\\ \varphi=\frac{23\pi}{12},\end{cases}$

所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{23\pi}{12}\right)-1$.

6.解:(1)$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位长度}}$ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{(纵坐标不变)}}$ $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{纵坐标伸长到原来的}\sqrt{2}\text{倍(横坐标不变)}}$ $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向上平移 2 个单位长度}}$ $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ 的图象.

能力提升

1.C　**解析**:由题意知,曲线 C 为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,又 C 关于 y 轴对称,则 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$.又 $\omega>0$,故当 $k=0$ 时,ω 取得最小值 $\frac{1}{3}$.故选 C.

2.B　**解析**:$g(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,

将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,可得 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象,即将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,即可得到 $y=g(x)$ 的图象.

3.BD　**解析**:将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后,得到的函数图象对应的函数解析式为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 是奇函数，所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，选项 B，D 满足，A，C 不满足.

4.C　**解析**：将 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，

得到 $y=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\omega x$ 的图象，

则 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+\frac{3}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以当 $k=0$ 时，ω 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

5.$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$　**解析**：把函数 $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $f(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象.故答案为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$.

自我超越

1.$\left[\frac{11}{4},4\right]$　**解析**：依题意可得 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{2\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$.

因为 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 在 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点，

所以 $\frac{5\pi}{2}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{11}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$.

令 $2k\pi\leqslant\omega x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

令 $k=0$，得 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$ 上单调递减，

所以 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]\subseteq\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$，所以 $\begin{cases}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{12},\\ \frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{12},\end{cases}$

又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant4$.

综上所述，$\frac{11}{4}\leqslant\omega\leqslant4$，即 ω 的取值范围是 $\left[\frac{11}{4},4\right]$.

2.解：(1) $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}=\sin2\omega x+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos2\omega x}{2}-\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega>0$). 因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y=2\sin2x$ 的图象；再向上平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)=2\sin2x+2$ 的图象.

令 $g(x)=0$，得 $\sin2x=-1$，所以 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上所有零点的和为 $\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{11\pi}{4}+\frac{15\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}=\frac{55\pi}{4}$.

课后素养评价(五十七)

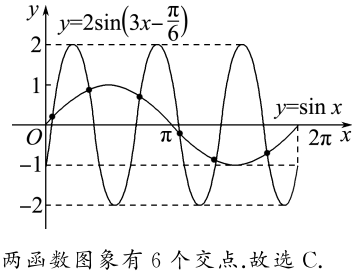
基础落实

1.C　**解析**：因为函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 2π，

函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$，

所以在 $[0,2\pi]$ 上，函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期.

在直角坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示.

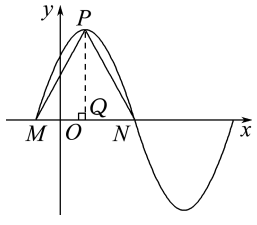


由图可知，两函数图象有 6 个交点.故选 C.

2.C　**解析**：由函数图象可知 $A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $T=\pi$. 又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. 将 $\left(\frac{5\pi}{12},-2\right)$ 代入 $y=2\sin(2x+\varphi)$ 中得到 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$. 因为 $0<\varphi<\pi$，所

以$\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{11\pi}{6}$，故$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{2\pi}{3}$.故选C.

3.A　**解析**：如图，过点P作x轴的垂线，垂足为Q，则Q为MN的中点.



因为$\triangle PMN$是边长为2的正三角形，$ON=3OM$，

所以$M\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{3}{2},0\right)$，$PQ=\sqrt{3}$，所以$P\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，所以$A=\sqrt{3}$.

又$T=2MN=4$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=4$，解得$\omega=\frac{\pi}{2}$，

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$.

将点$P\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$代入得$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，所以$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以$\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4.AB　**解析**：由图可知$f(x)$的最小正周期为$T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$.又$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，即$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

令$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于A，可得$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(-\pi)=0$，所以A正确；

对于B，因为$f(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以B正确；

对于C，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

当$k=0$时，得到$f(x)$的一个单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，

下一个单调递增区间为$\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$，

所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$上不是单调递增的，所以C错误；

对于D，令$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

则$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq0$，所以D错误.

5.$\frac{5\pi}{12}$　**解析**：将函数$f(x)=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$m(m>0)$个单位长度，得到函数$g(x)=-3\cos\left[2(x-m)+\frac{\pi}{3}\right]=-3\cos\left(2x-2m+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.若$g(x)$为奇函数，则$-2m+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以$m=-\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则正数$m$的最小值为$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{12}$.故答案为$\frac{5\pi}{12}$.

6.$\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$　$\left[\frac{5}{3},2\right]$　**解析**：由题图可得$A=1$，$T=2\times\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=2$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，则$f(x)=\sin(\pi x+\varphi)$，

当$x=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{5}{6}$时，$f(x)$取得最大值，则$\frac{5}{6}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

所以$f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$，则$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$\frac{5}{3}+4k\leqslant x\leqslant\frac{11}{3}+4k(k\in\mathbf{Z})$，

故$g(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{5}{3}+4k,\frac{11}{3}+4k\right](k\in\mathbf{Z})$.

则$k=0$时，$g(x)$在$[1,2]$上的单调递减区间为$\left[\frac{5}{3},2\right]$.

7.解：(1)由题意知$A=\sqrt{2}$，$T=4\times\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以$y=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)$.

又因为一个最高点的坐标为$\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right)$，

所以$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi\right)=\sqrt{2}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi\right)=1$，

所以$\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.

又因为$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

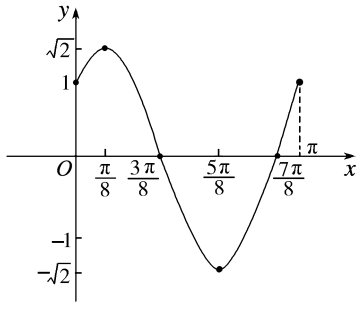
所以$y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)因为$0\leqslant x\leqslant\pi$,所以$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{9\pi}{4}$.

列出x,y的对应值表:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
y	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1

描点,连线,如图所示.



能力提升

1.AB　**解析**:由函数图象可知,函数的最大值为3,因为$A>0$,且A为正弦型函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的振幅,所以$A=3$.

设函数的周期为T,根据正弦函数图象的性质,$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}$,则$T=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$,此时$f(x)=3\sin(2x+\varphi)$.

已知函数图象过点$\left(\frac{\pi}{12},3\right)$,将其代入$f(x)=3\sin(2x+\varphi)$可得$3=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)$,即$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$,那么$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于A,将$x=0$代入$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,得$f(0)=3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,故选项A正确.

对于B,对于正弦函数$y=\sin x$,其对称中心的横坐标满足$x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

令$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,此时$f(x)=0$,

所以$f(x)$图象的对称中心为$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,故选项B正确.

对于C,对于正弦函数$y=\sin x$,其图象的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

令$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.

当$x=\pi$时,$2\pi+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以直线$x=\pi$不是$f(x)$图象的一条对称轴,故选项C错误.

对于D,将$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,根据"左加右减"的原则,得到$y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

根据诱导公式$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$,$3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 3\cos 2x$,所以选项D错误.

故选AB.

2.BCD　**解析**:由题表可得,$A\times 0+B=2\Rightarrow B=2$,$A+B=5\Rightarrow A=3$.

又易知$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$,所以$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}$,

所以$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$,故A错误;

令$g(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$,

因为$g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=-3$,

所以直线$x=-\frac{2\pi}{3}$是函数$g(x)$的图象的一条对称轴,即为函数$f(x)$的图象的一条对称轴,故B正确;

因为$g\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)=0$,所以$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$是函数$g(x)$的图象的一个对称中心,

所以$\left(-\frac{5\pi}{12},2\right)$是函数$f(x)$的图象的一个对称中心，故C正确；

将函数$f(x)$的图象先向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，再向下平移2个单位长度，所得图象对应的函数$y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]+2-2=-3\sin 2x$为奇函数，故D正确.故选BCD.

3.ABD　**解析**：先将函数$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，可得$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

对于A，$g(0)=\sin\left(2\times0-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故A正确；对于B，$g\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以直线$x=\frac{5\pi}{12}$是$g(x)$图象的一条对称轴，故B正确；对于C，$g\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=1$，所以$\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$不是$g(x)$图象的一个对称中心，故C错误；对于D，当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，且函数$y=\sin x$在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减，所以$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减，故D正确.故选ABD.

4.$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$（答案不唯一）　**解析**：设$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$，

由①知$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=2$.由②③知当$x=\frac{\pi}{3}$时，$y$取得最大值，故$A\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=A$，

所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi$可取$-\frac{\pi}{6}$，此时$y=A\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

故函数可为$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，答案不唯一.

5.$\frac{1}{2}$　**解析**：设$f(x)$的最小正周期为T，则$\frac{1}{2}T\geqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$，故$T\geqslant\frac{2\pi}{3}$.又$f(x)$的图象向左平移$\pi$个单位长度后与原来的图象重合，故$\pi$为函数$f(x)$的一个周期，故最小正周期$T=\pi$，即$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，解得$\omega=\pm2$.若$\omega=2$，则$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，此时$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，不符合题意；若$\omega=-2$，则$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$，故$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减，符合题意.由$x\in\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$，得$-2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{5\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)$.因为$\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9}{10}$在$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$上的解为$x_1,x_2$，由对称性可得$\frac{-2x_1+\frac{\pi}{6}-2x_2+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{3\pi}{2}$，即$x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$，所以$\cos(x_1+x_2)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$.故答案为$\frac{1}{2}$.

6.解：(1)因为$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，

再将其图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，可得函数$g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，

若函数$h(x)=g(x)-m=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-m$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个零点，

则$g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$与$y=m$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个

交点，由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，得 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，由 $4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{6}$，

所以结合正弦函数性质可得，$y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减，

因为 $g(0)=-1$，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，

所以要使 $g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个交点，只要 $1\leqslant m<2$，故 m 的范围为 $[1,2)$.

自我超越

解：(1) 函数 $f(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}$，

由 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，

则 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，而 $\omega>0$，解得 $\omega=1$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2) 依题意，$g(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega\right)+1$，由 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 的一个零点，得 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega\right)+1=0$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$ 或 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3+6k_1$，$k_1\in\mathbf{Z}$ 或 $\omega=5+6k_2$，$k_2\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega<5$，于是 $\omega=3$，函数 $g(x)=2\sin\left(6x-\frac{5\pi}{6}\right)+1$，当 $\frac{\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{36}$ 时，$-\frac{\pi}{6}\leqslant 6x-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2\pi$，设 $t=6x-\frac{5\pi}{6}$，则 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$，函数 $g(x)$ 化为 $h(t)=2\sin t+1$，$g(x)-a=0$ 即 $2\sin t=a-1$，依题意，函数 $y=2\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$ 内的图象与直线 $y=a-1$ 有 3 个不同的交点，作出 $y=2\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$ 上的图象(图略)，则当 $-1\leqslant a-1\leqslant 0$，即 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$y=2\sin t$ 与 $y=a-1$ 恰有 3 个不同的交点，因此实数 a 的取值范围为 $[0,1]$，设 $y=2\sin t$ 与 $y=a-1$ 的 3 个不同的交点的横坐标分别为 $t_1,t_2,t_3(t_1<t_2<t_3)$，则 $t_1+t_2=\pi$，$t_2+t_3=3\pi$，于是 $t_1+2t_2+t_3=4\pi$，即 $\left(6x_1-\frac{5\pi}{6}\right)+2\left(6x_2-\frac{5\pi}{6}\right)+\left(6x_3-\frac{5\pi}{6}\right)=4\pi$，所以 $x_1+2x_2+x_3=\frac{11\pi}{9}$.

课后素养评价(五十八)

基础落实

1.A **解析**：根据表格数据可知最大高度为 9 m，最小高度为 3 m.

不妨取 $A>0$，可得 $\begin{cases}A+B=9,\\-A+B=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}A=3,\\B=6.\end{cases}$

数据完成一个周期用时 12 s，因此周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=12$，可得 $\omega=\frac{\pi}{6}$，

因此函数模型为 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+6$.

代入 $t=25$，可得 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 25\right)+6=3\sin\frac{\pi}{6}+6=\frac{3}{2}+6=7.5$. 故选 A.

2.C

能力提升

1.ABD **解析**：由题意可得 $y=\frac{80}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}t+\frac{10}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}t=\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}t+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}t\right)=\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $20\leqslant\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 30$，则 $-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $6k-2\leqslant t\leqslant 6k$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $6k+2\leqslant t\leqslant 6k+4$，$k\in\mathbf{Z}$. 结合 $8\leqslant t\leqslant 16$，取 $k=1$ 时，8

$\leqslant t\leqslant 10$，$k=2$ 时，$10\leqslant t\leqslant 12$ 或 $14\leqslant t\leqslant 16$，所以 $10\leqslant t\leqslant 12$ 或 $8\leqslant t\leqslant 10$ 或 $14\leqslant t\leqslant 16$，

所以他能欣赏到这种花开放的时段是 8～10 时，10～12 时，14～16 时.故选 ABD.

2. $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+7(1\leqslant x\leqslant 12, x\in\mathbf{N}^*)$ **解析：** 因为 3 月份达到最高价 9 千元，7 月份价格最低为 5 千元，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=2\times(7-3)=8$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.

由 $\begin{cases}A+b=9,\\-A+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\b=7,\end{cases}$ 所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)+7$.

由 $f(3)=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)+7=9$，可得 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

因此 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+7(1\leqslant x\leqslant 12, x\in\mathbf{N}^*)$.

自我超越

解：(1)由题图可得 $A=\frac{6-2}{2}=2$，$b=\frac{6+2}{2}=4$.

因为最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$，

将(0,6)代入 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\varphi\right)+4$，得 $\sin\varphi=1$，$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)+4=2\cos\frac{\pi}{3}t+4$，所求函数的解析式为 $y=2\cos\frac{\pi}{3}t+4(t\geqslant 0)$.

(2)设乙车间投产 t h，甲、乙两车间污水排放量之和为 W m^3，此时甲车间污水排放量为 $\left[2\cos\frac{\pi(t+1)}{3}+4\right]\mathrm{m}^3$，乙车间污水排放量为 $\left(2\cos\frac{\pi t}{3}+4\right)\mathrm{m}^3$，

故 $W=2\cos\frac{\pi(t+1)}{3}+2\cos\frac{\pi t}{3}+8=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+8$

$=3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)+8=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+8$，

所以 $W=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+8$，$t\geqslant 0$.

故两车间都投产时的最大污水排放量为 $(2\sqrt{3}+8)\mathrm{m}^3$.